

**ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ADMISSION 2021**

**VENDREDI 16 AVRIL 2021 - 8h00 – 13h00
FILIERE PSI**

COMPOSITION de MODELISATION

Durée : 5 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

**Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être
une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa
composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené
à prendre**

1.2. Le système PB150® et l'énergie houlomotrice

Lorsque le vent se met à souffler sur une mer calme, il déplace l'eau générant ainsi des micros ondulations en surface qui rident le plan d'eau. De proche en proche, l'ondulation se développe jusqu'à devenir une houle, pouvant se propager même en absence de vent. Sans effet de fond, ni d'effet de bord, la houle possède un aspect régulier ; il sera alors possible d'estimer l'énergie et la puissance de cette onde incidente que notre système devra convertir en énergie électrique.



Figure 2 : De la naissance de la houle au déferlement à la côte.

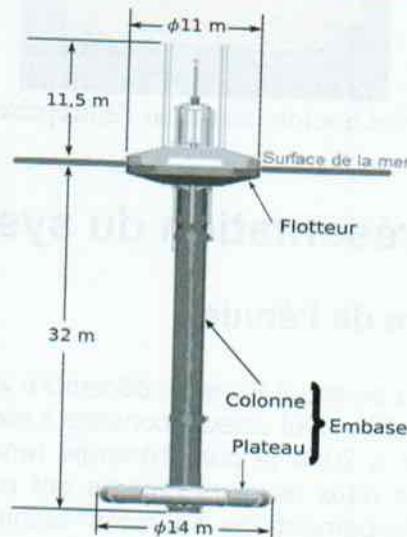


Figure 3 : Mise en situation de la génératrice houlomotrice PB150

Le système étudié possède un fonctionnement similaire au système PB150 PowerBuoy® de la société Ocean Power Technology. Il est constitué d'un flotteur en liaison glissière par rapport à l'ensemble {colonne-plateau} appelé embase. Placés dans la zone de propagation libre de la houle, les deux solides flottent et sont soumis à la perturbation de l'onde incidente, ce qui a pour effet de modifier leur position verticale relative. Ce mouvement de translation est transformé en rotation par l'intermédiaire d'un système de transformation de mouvement de type pignon-crémaillère, ce qui entraîne une génératrice synchrone auto-piloté (MSAP). On donne respectivement Figure 3 et Figure 4 une illustration du système en condition de fonctionnement et une représentation de la chaîne de conversion d'énergie.

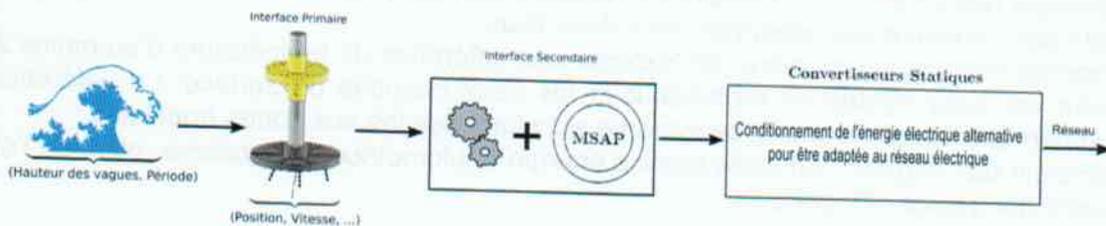


Figure 4 : Chaîne de conversion d'énergie de la génératrice houlomotrice.

2. Étude de la houle

L'objectif de cette partie est de démontrer quelques particularités de la houle et d'estimer, dans le cadre d'une profondeur infinie, la puissance théorique récupérable par le système de génératrice houlomotrice. Des études satellitaires permettent de tracer la carte de la puissance de la houle pour une largeur de 1 m du front d'onde.

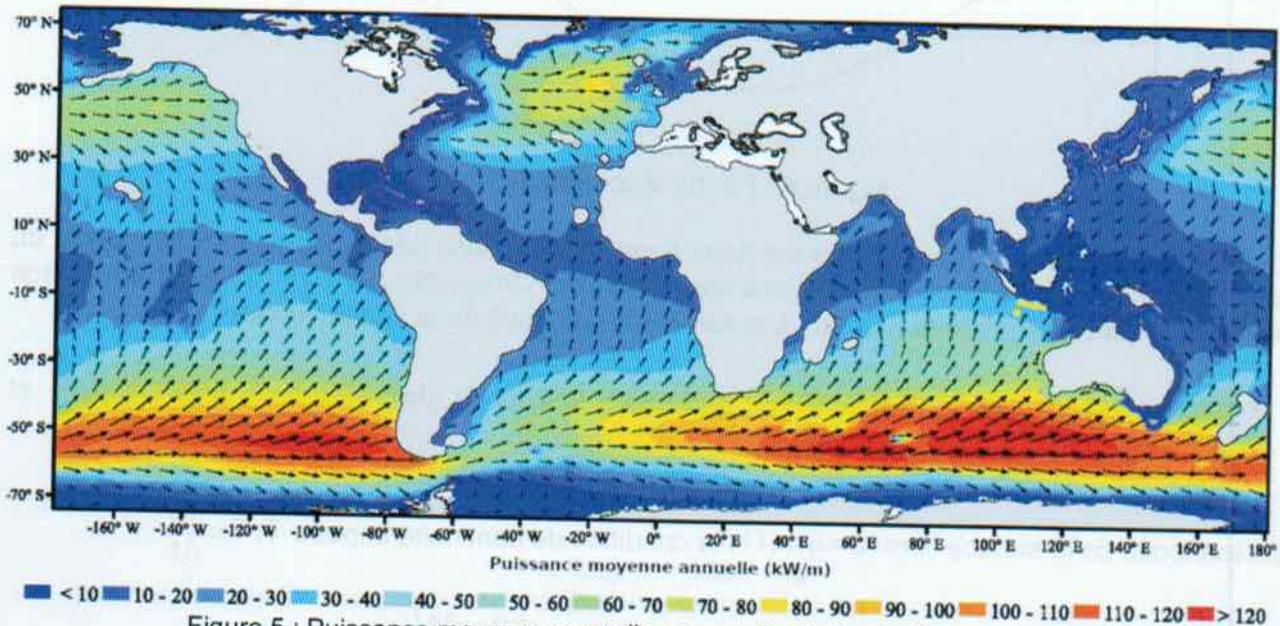


Figure 5 : Puissance moyenne annuelle pour un front d'onde d'1m de largeur.

Q1) Quels sont les endroits du globe intéressants où placer une génératrice houlomotrice pour alimenter les villes ?

2.1. Propriétés cinématiques de la houle

Pour tout le sujet, on considérera valable l'hypothèse problème plan, dans le plan (\vec{e}_z, \vec{e}_x) . On notera $g = 10 \text{ m/s}^2$ l'accélération de la pesanteur ($\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$), et on prendra la masse volumique de l'eau égale à $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Les vagues sont modélisables (voir figure 6) par une onde mécanique progressive harmonique de longueur d'onde λ et de pulsation ω se propageant suivant la direction \vec{e}_x positif. On note a la hauteur de la vague, T la période des vagues et k la norme du vecteur d'onde tel que $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_x$.

Q2) Écrire l'équation de la surface libre de la vague $z = \eta(x, t)$. On prendra $\eta = 0$ pour $t = 0$ et $x = \lambda/4$.

On note $\vec{v}_f(x, z, t) = u(x, z, t) \cdot \vec{e}_x + w(x, z, t) \cdot \vec{e}_z$ la vitesse d'une particule fluide. On considère que l'eau est incompressible et possède un écoulement irrotationnel. On négligera les efforts de viscosité devant les autres actions mises en jeu. Enfin la cambrure de la houle, définie par $C_a = \frac{2a}{\lambda}$, est petite de manière à pouvoir linéariser les équations au premier ordre.

Q3) Écrire la loi locale de conservation de la masse en fonction de \vec{v}_f .

Q4) En utilisant le caractère irrotationnel de l'écoulement, montrer, par analogie avec l'électrostatique, qu'il existe un potentiel $\phi(x, z, t)$ qui vérifie en tout point du domaine fluide $\Delta \phi = 0$.

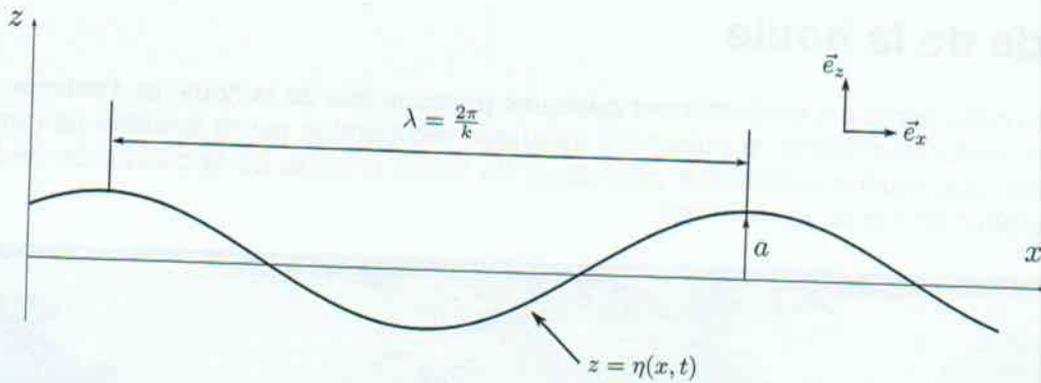


Figure 6 : Forme d'onde de la houle.

On cherche maintenant à déterminer les deux équations vérifiées par le potentiel ϕ au niveau du fond de l'océan et au niveau de la surface libre avec l'air. On appelle $\alpha(x, t)$ l'angle de la surface libre avec l'horizontal et \vec{n} la normale à la surface en un point de la surface libre.

Q5) Montrer, à l'aide d'un schéma, que pour tout point de la surface libre $\alpha \approx \frac{\partial \eta}{\partial x}$ et $\vec{n} \approx \vec{e}_z - \alpha \cdot \vec{e}_x$.

En tout point de la surface libre $z = \eta(x, t)$, la condition de continuité impose $\vec{v}_t \cdot \vec{n} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$.

Q6) Montrer qu'au premier ordre, cette relation s'écrit $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta}$.

La profondeur de l'eau par rapport à la ligne moyenne est constante et notée d (figure 7).

Q7) Écrire la condition d'imperméabilité vérifiée par ϕ au niveau du fond de l'eau supposé plat.

Finalement, on donne l'équation de Bernoulli linéarisée dans le cas d'un écoulement non stationnaire, reliant la pression relative p avec la hauteur de la particule dans l'eau et le potentiel de vitesse :

$$p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1)$$

Le calcul du potentiel de vitesse revient alors à résoudre le problème suivant :

$$\Delta \phi = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} = -g \eta \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-d} = 0 \quad (5)$$

On cherche une solution sous la forme : $\phi(x, z, t) = \varphi(z) \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$.

Q8) Montrer que $\varphi(z)$ peut s'écrire sous la forme $\varphi(z) = A \cdot \cosh(k \cdot z) + B \cdot \sinh(k \cdot z)$ où A et B sont deux constantes réelles.

Q9) En combinant les relations (3), (4) et (5), montrer que la relation de dispersion de la houle s'écrit $\omega^2 = g \cdot k \cdot \tanh(kd)$.

On se place maintenant dans le cadre d'une grande profondeur par rapport à la longueur d'onde ($d \gg \lambda$).

Q10) Que devient la relation précédente ?

Toute résolution faite, on arrive finalement à écrire l'expression du potentiel de vitesse :

$$\phi(x, z, t) = \frac{a \cdot \omega}{k} \cdot e^{k \cdot z} \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

Q11) En déduire l'expression du vecteur vitesse \vec{v}_f d'une particule fluide.

On considère un point $M(x, z)$ au voisinage du point de coordonnées (x_0, z_0) . On pourra poser $x(t) = x_0 + x_1(t)$ et $z(t) = z_0 + z_1(t)$, avec $x_1(t) \ll x_0$ et $z_1(t) \ll z_0$. On posera $x_1(0) = z_1(0) = 0$.

Q12) Calculer $x_1(t)$ et $z_1(t)$ et en déduire, en justifiant, l'équation cartésienne et la nature de la trajectoire d'une particule fluide M de coordonnées (x, z) .

2.2. Aspect énergétique

On se place toujours en eau infiniment profonde ($d \rightarrow \infty$). Dans cette sous-partie, on cherche à déterminer un ordre de grandeur de la puissance transportée par la houle et qui pourrait être récupérable par une génératrice houlomotrice.

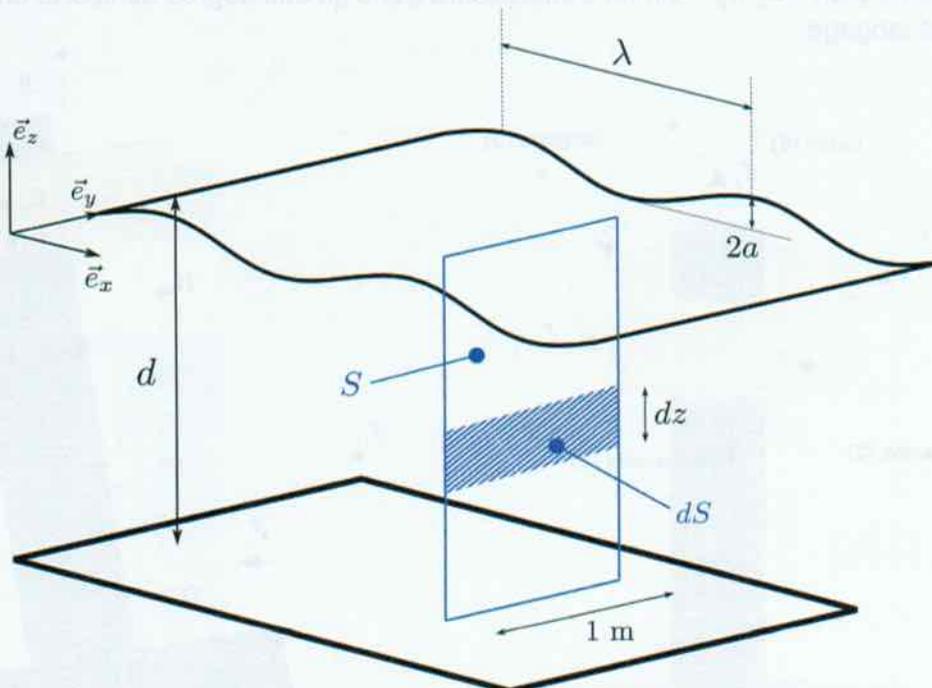


Figure 7 : Caractéristiques géométriques.

Q13) Exprimer la puissance élémentaire dP_f des forces de pression des particules fluides situées au niveau de la surface dS de largeur unitaire à l'aide de l'équation (1). Donner son expression en fonction des variables ϕ , z , $u = \vec{v}_f \cdot \vec{e}_x$ et des constantes caractéristiques de l'écoulement.

La puissance houlomotrice P_w est définie comme la puissance moyenne, sur une période T de houle, transportée pour un front d'onde de largeur unitaire. On peut écrire $P_w = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-d}^0 dP_f dt$.

Q14) Calculer l'expression de la puissance houlomotrice dans le cas d'une profondeur infinie $d \rightarrow \infty$ et pour $k\eta \ll 1$.

Q15) À l'aide de la relation de dispersion trouvée à la question 10, montrer que l'on peut écrire $P_w = \rho \frac{a^2 g^2}{8\pi} T$.

Q16) Comment évolue la puissance houlomotrice avec la fréquence de l'onde ? Est-ce conforme à d'autres domaines de la physique ? Justifier.

Proche de nos côtes, la houle est typiquement périodique, de période 8 secondes, avec des vagues d'amplitude 1m ($a=1$ m).

Q17) Calculer la valeur numérique de la puissance houlomotrice potentiellement récupérable. Valider le résultat avec les données de la figure 5.

3. Mise en place du modèle dynamique du système

En ingénierie navale, un corps flottant peut posséder 6 degrés de liberté (voir figure 8). Les trois translations portent les noms de cavalement, embardée, pilonnement pour les translations respectives sur \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z , les trois rotations autour des mêmes axes sont appelées roulis, tangage, lacet. Dans le cas de notre étude où l'onde incidente est dirigée suivant \vec{e}_x , on reste dans un problème plan (\vec{e}_z, \vec{e}_x). On ne s'intéressera donc qu'aux degrés de liberté en cavalement, pilonnement et tangage.

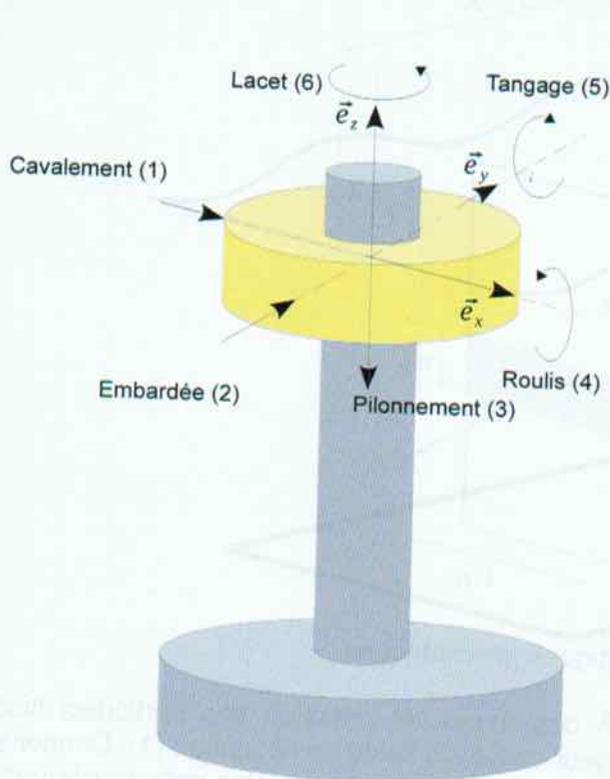


Figure 8 : Définition des degrés de liberté d'un objet flottant

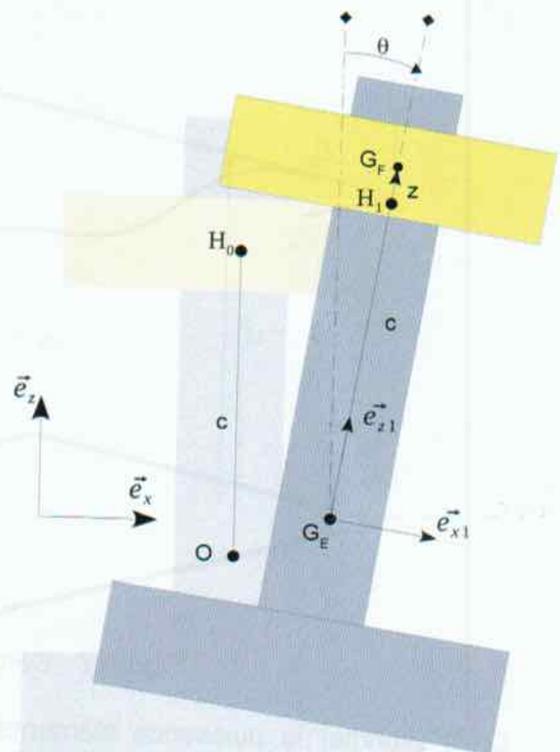


Figure 9: Paramétrage géométrique

On cherche dans cette partie à mettre en place un modèle de comportement dynamique de la structure soumise à la houle. On vise notamment à montrer que le comportement suivant l'axe de pilonnement est découplé des autres mouvements.

3.1. Paramétrage du système

Sous l'action de la houle, la structure se déplace autour de sa position d'équilibre définie par le repère fixe $R_0=(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ où O est confondu avec le centre de gravité G_E de l'embase={Colonne+Plateau} à l'équilibre. Toujours à l'équilibre, on définit le point H_0 confondu avec le centre de gravité du flotteur G_F tel que $\overline{OH_0}=c\vec{e}_z$.

Pour une position quelconque (voir figure 9), on pose $\overline{OG_E}=x_e(t)\vec{e}_x+z_e(t)\vec{e}_z$. On note H_1 le point tel que $\overline{G_E H_1}=c\vec{e}_z$. La translation relative du flotteur par rapport à l'embase est représentée par la variable $z(t)$ telle que le centre de gravité du flotteur soit défini par $\overline{H_1 G_F}=z(t)\vec{e}_z$. Par ailleurs on pose $\overline{H_0 G_F}=x_f(t)\vec{e}_x+z_f(t)\vec{e}_z$. De plus, la cambrure de la houle étant faible, on considère que la rotation θ , les déplacements et les vitesses sont petits. Les relations géométriques et cinématiques obtenues devront donc être linéarisées à l'ordre 1.

Q18) Exprimer x_f et z_f en fonction de x_e , z_e , z , θ et des caractéristiques géométriques du système.

3.2. Mise en place de l'action du fluide

L'ensemble houlomoteur subit l'action de la pesanteur ainsi que l'action du fluide sur chaque surface des corps immergés. Cette partie vise à mettre en place un modèle pour ces actions du fluide sur le flotteur et sur l'embase.

Q19) Donner l'expression de la résultante des actions mécaniques du fluide sur le flotteur en fonction de la pression p .

Dans la partie sur l'étude de la houle, on a vu que la pression d'une particule fluide pouvait s'écrire sous la forme $p=-\rho \cdot g \cdot z - \rho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t}$.

La première partie de l'expression engendre une action appelée action hydrostatique, la seconde engendre une action hydrodynamique. De manière générale pour l'action hydrostatique, on notera :

$$(T_{hs \rightarrow E})_{G_E} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{hs \rightarrow E} \\ \vec{M}_{G_E, hs \rightarrow E} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad (T_{hs \rightarrow F})_{G_E} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{hs \rightarrow F} \\ \vec{M}_{G_E, hs \rightarrow F} \end{Bmatrix}$$

Dans cette notation, les indices E et F désignent respectivement l'embase et le flotteur. Les paramètres géométriques de l'embase et du flotteur sont consultables à l'annexe 1.

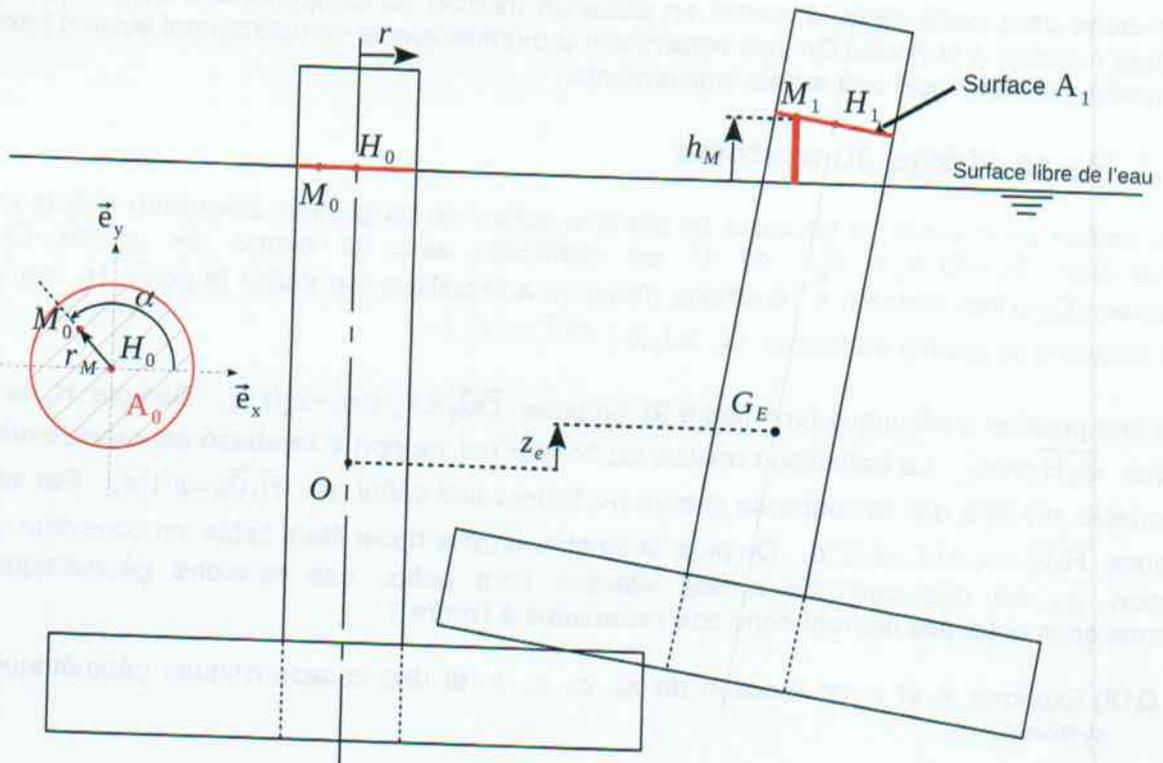


Figure 10: Volume d'eau déplacé par l'embase à l'équilibre et pour une position quelconque.

Détermination de l'action hydrostatique du fluide

Q20) Donner l'autre nom de l'effort hydrostatique sur l'embase et son expression générale en fonction de V , volume du solide immergé.

Pour la suite, on indice par 0 le nom des points dans la position à l'équilibre et par 1 dans une position quelconque. Soit M_0 un point de la surface A_0 intersection de l'embase avec la surface libre de l'eau sans houle à l'équilibre (figure 10). On paramètre M_0 par ses coordonnées polaires (r_M, α) dans le plan $(H_0, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

En appelant V_0 le volume de l'embase immergée à l'équilibre et sous l'hypothèse de petits déplacements, on peut écrire $V = V_0 - \int_{A_1} h_M dS$, où h_M est la hauteur d'un point M_1 de la surface A_1 par rapport à la surface libre (figure 10).

Q21) Expliquer la signification de cette équation.

On appelle $\vec{\epsilon}(M_0) = \overline{M_0 M_1}$ le déplacement du point M_0 . Sous conditions de petits mouvements, on montre que le déplacement d'un point d'un solide est le champ de moment d'un torseur dont la résultante est le vecteur rotation. On peut donc écrire $\vec{\epsilon}(M_0) = \vec{\epsilon}(O) + \overline{M_0 O} \wedge \theta \vec{e}_y$.

Q22) En déduire une expression de la hauteur h_M en fonction de z_e , r_M , α et θ .

Q23) Montrer alors que l'effort hydrostatique du fluide sur l'embase peut s'écrire $\vec{F}_{hs \rightarrow E} = (\rho g V_0 - \rho g \pi r^2 z_e) \vec{e}_z$

Q24) Par analogie, exprimer l'effort hydrostatique du fluide sur le flotteur $\vec{F}_{hs \rightarrow F}$. La géométrie du flotteur est définie dans l'annexe 1.

On cherche maintenant à déterminer l'expression du moment de l'action hydrostatique de la mer sur l'embase au point G_E , noté $\vec{M}_{G_E, hs \rightarrow E}$. Pour cela, on sait que l'action hydrostatatique est un glisseur au centre de carène C , défini comme le centre de gravité du volume d'eau déplacé par l'embase pour une position quelconque. On peut donc écrire $\vec{M}_{G_E, hs \rightarrow E} = \vec{G}_E \vec{C} \wedge \vec{F}_{hs \rightarrow E}$. On note B_0 , la position du centre de carène à l'équilibre.

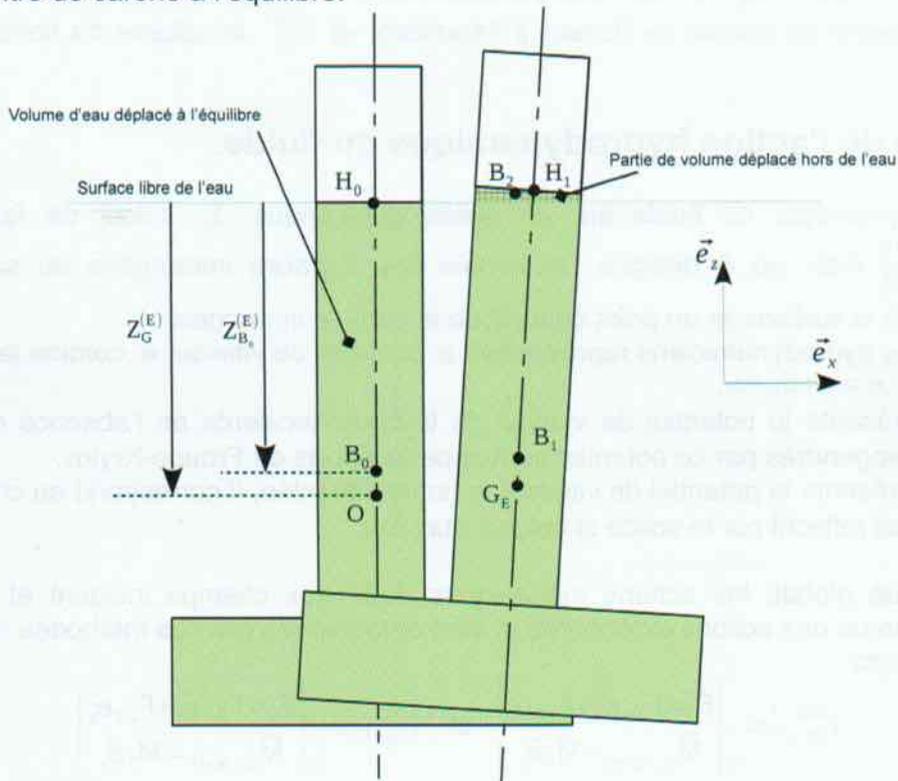


Figure 11 : Définition des centres de gravité associés aux volumes déplacés

Q25) À l'aide des dimensions de l'annexe 1, déterminer les expressions des positions verticales des points B_0 et O , notées respectivement $Z_{B_0}^{(E)}$ et $Z_G^{(E)}$ dans le repère $(H_0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On note B_1 l'image de B_0 dans une position quelconque de l'embase, et B_2 le centre de gravité associé au volume hors de l'eau ΔV dû au déplacement de l'embase (figure 11).

Q26) Exprimer $\vec{G}_E \vec{C}$ en fonction de $\vec{G}_E \vec{B}_1$, $\vec{G}_E \vec{B}_2$, V_0 et ΔV .

Q27) Déterminer $\vec{G}_E \vec{B}_1$ en fonction de $Z_G^{(E)}$, $Z_{B_0}^{(E)}$ et θ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Il est possible de montrer qu'une approximation de $\vec{G}_E \vec{B}_2$ est donnée par la relation :

$$\vec{G}_E \vec{B}_2 = c \cdot \vec{e}_{z1} - \frac{r^2 \cdot \theta}{4 \cdot z_e} \vec{e}_{x1}$$

Q28) Montrer alors que le moment $\vec{M}_{G_E, hs \rightarrow E}$ s'écrit au premier ordre sous la forme

$$\vec{M}_{G_E, hs \rightarrow E} = -\rho g \left[(Z_{B_0}^{(E)} - Z_G^{(E)}) V_0 + \frac{\pi \cdot r^4}{4} \right] \theta \vec{e}_y$$

Q29) En ingénierie maritime, l'action hydrostatatique est souvent appelée raideur hydrostatatique. Expliquer ce vocabulaire à partir de son expression analytique, en faisant une analogie mécanique.

Pour la suite, on peut montrer que le moment de l'action hydrostatique sur le flotteur prend une forme similaire et peut s'écrire $\vec{M}_{G_E, hs \rightarrow F} = -\rho \cdot g \cdot \left[(Z_{B_0}^{(F)} - Z_G^{(F)}) V_0^{(F)} + \pi \cdot \frac{R^4 - r^4}{4} \right] \cdot \theta \cdot \vec{e}_y$.

Dans cette expression, $Z_{B_0}^{(F)}$ et $Z_G^{(F)}$ désignent respectivement la position verticale du centre de carène et du centre de gravité du flotteur à l'équilibre, et $V_0^{(F)}$ le volume du flotteur immergé à l'équilibre.

Modèle de l'action hydrodynamique du fluide.

L'effort hydrodynamique du fluide sur un solide quelconque Σ_i s'écrit de façon formelle : $\vec{F}_{hd \rightarrow \Sigma_i} = \int_S -\rho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \vec{n} dS$ où S désigne l'ensemble des surfaces immergées du solide et \vec{n} la normale locale à la surface en un point courant de la surface immergée.

Usuellement, les hydrodynamiciens représentent le potentiel de vitesse ϕ comme la superposition de 3 potentiels, $\phi = \phi_i + \phi_D + \phi_R$:

- ϕ_i représente le potentiel de vitesse de la houle incidente en l'absence de solide. Les efforts engendrés par ce potentiel sont appelés efforts de Froude-Krylov.
- ϕ_D représente le potentiel de vitesse de houle diffractée. Il correspond au champ de houle qui serait réfléchi par le solide si celui-ci était fixe.

Du point de vue global, les actions mécaniques dues aux champs incident et diffracté sont considérées comme des actions extérieures et sont déterminées par des méthodes numériques. On posera donc ici :

$$\left(T_{hd \rightarrow E}^{i+D} \right)_{G_E} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_1 = F_{1x} \vec{e}_x + F_{1z} \vec{e}_z \\ \vec{M}_{G_E, hd \rightarrow E} = M_1 \vec{e}_y \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \left(T_{hd \rightarrow F}^{i+D} \right)_{G_E} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_2 = F_{2x} \vec{e}_x + F_{2z} \vec{e}_z \\ \vec{M}_{G_E, hd \rightarrow F} = M_2 \vec{e}_y \end{array} \right\}.$$

- ϕ_R représente le potentiel de vitesse de radiation. Il correspond à la houle émise par le flotteur lorsque celui-ci bouge en eau calme. L'action due à ce potentiel est appelée action de radiation.

$$\left(T_{hd \rightarrow E}^R \right)_{G_E} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_3 = F_{3x} \vec{e}_x + F_{3z} \vec{e}_z \\ \vec{M}_{G_E, hdr \rightarrow E} = M_3 \vec{e}_y \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \left(T_{hd \rightarrow F}^R \right)_{G_E} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_4 = F_{4x} \vec{e}_x + F_{4z} \vec{e}_z \\ \vec{M}_{G_E, hdr \rightarrow F} = M_4 \vec{e}_y \end{array} \right\}.$$

Pour la suite, toutes ces composantes seront considérées connues.

Modèle de l'action du récupérateur d'énergie

Pour un fonctionnement normal, le système de conversion d'énergie mécanique en énergie électrique (interface secondaire sur la figure 4, notée IS) agit sur l'interface primaire (embase et flotteur en interaction avec la houle). C'est cette action qui, par l'intermédiaire d'une transformation de mouvement permettra de faire tourner la génératrice synchrone. Cette action mécanique sera modélisée comme un glisseur suivant l'axe (G_E, \vec{e}_z) . On pose :

$$\left(T_{IS \rightarrow F} \right)_{G_E} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_u = F_u \vec{e}_z \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Le théorème des actions réciproques permet d'écrire $\left(T_{IS \rightarrow F} \right) = - \left(T_{IS \rightarrow E} \right)$.

3.3. Modèle dynamique

On note m_E et m_F les masses respectives de l'embase et du flotteur. Les caractéristiques dimensionnelles des solides sont données en annexe 1 et on considère que toutes les pièces (flotteur, colonne, plateau) sont homogènes. On supposera que les déplacements restent petits et on ne gardera que les termes d'ordre 1.

Q30) Donner la forme des matrices d'inertie de l'embase et du flotteur en leur centre de gravité.

Le moment d'inertie d'un cylindre plein de rayon R_c et de hauteur h_c , de centre de gravité G , autour de l'axe (G, \vec{y}) perpendiculaire à son axe de révolution est donné par $I_y = m_c \frac{R_c^2}{4} + m_c \frac{h_c^2}{12}$, où m_c est la masse du cylindre.

Q31) En déduire l'expression de $I_{y,F}$, moment d'inertie du flotteur au point G_F autour de la direction \vec{e}_y . Vous donnerez le résultat en fonction de m_F et des caractéristiques dimensionnelles données en annexe 1.

Pour la suite, on note $I_{y,E}$ le moment d'inertie de l'embase au point G_F autour la direction \vec{e}_y .

On isole dans un premier temps l'ensemble $\Sigma = \{\text{embase} + \text{flotteur}\}$.

Q32) Calculer le torseur dynamique de l'ensemble Σ au point G_E par rapport au repère galiléen, en linéarisant à l'ordre 1. Vous exprimerez le résultat en fonction des dérivées des paramètres (x_e, z_e, θ, z) et des constantes géométriques et inertielles du problème.

Q33) Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué au système Σ .

On obtient alors un système de 3 équations à 4 inconnues (x_e, z_e, θ, z) . La dernière équation du mouvement est obtenue en isolant uniquement le flotteur.

On isole maintenant le flotteur.

Q34) Quelle équation particulière du principe fondamental de la dynamique appliqué au flotteur doit-on écrire pour obtenir une équation du mouvement ?

Q35) Écrire et linéariser cette équation, et former le système de 4 équations à 4 inconnues (x_e, z_e, θ, z) .

Q36) Simplifier ce système en tenant compte de l'équilibre du système en eau calme sans houle.

3.4. Mise en forme du problème dans le domaine fréquentiel

Grâce à l'hypothèse de linéarité (petits déplacements), il est d'usage de résoudre le système précédent dans le domaine fréquentiel. En adoptant une notation complexe, on pourra écrire pour toute grandeur x dépendante du temps $x(t) = \Re(\hat{X} e^{j\omega t})$, avec $\hat{X} \in \mathbb{C}$.

Il est possible de montrer que les amplitudes complexes de ces composantes dépendent des caractéristiques cinématiques des solides. On peut écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{F}_{3x} + \hat{F}_{4x} &= (a_{11}\omega - b_{11})\omega \hat{X}_e + (a_{13}\omega - b_{13})\omega \hat{\Theta} & \hat{F}_{3z} + \hat{F}_{4z} &= (a_{22}\omega - b_{22})\omega \hat{Z}_e + (a_{24}\omega - b_{24})\omega \hat{Z} \\ \hat{M}_3 + \hat{M}_4 &= (a_{31}\omega - b_{31})\omega \hat{X}_e + (a_{33}\omega - b_{33})\omega \hat{\Theta} & \hat{F}_{4z} &= (a_{41}\omega - b_{41})\omega \hat{X}_e + (a_{44}\omega - b_{44})\omega \hat{Z} \end{aligned}$$

Les coefficients a_{ij} et b_{ij} sont des fonctions de ω .

Après passage dans le domaine fréquentiel, les quatre équations du mouvement représentant la dynamique du système houlomoteur, peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & -\omega^2[(m_E+m_F+a_{11})\hat{X}_e+(m_F d+a_{13})\hat{\Theta}] + \omega[b_{11}\hat{X}_e+b_{13}\hat{\Theta}] & = \hat{F}_{1x}+ \\
 & -\omega^2[(m_E+m_F+a_{22})\hat{Z}_e+(m_F+a_{24})\hat{Z}] + \omega[b_{22}\hat{Z}_e+b_{24}\hat{Z}] + \rho g \pi R^2 \hat{Z}_e + \rho g \pi (R^2-r^2) \hat{Z} & = \hat{F}_{1z}+ \\
 & -\omega^2[(m_F d+a_{31})\hat{X}_e+(I_{y,E}+I_{y,F}+m_F d^2+a_{33})\hat{\Theta}] + \omega[b_{31}\hat{X}_e+b_{33}\hat{\Theta}] + k_{55} \hat{\Theta} & = \hat{M}_1+ \\
 & -\omega^2[(m_F+a_{41})\hat{Z}_e+(m_F+a_{44})\hat{Z}] + \omega[b_{41}\hat{Z}_e+b_{44}\hat{Z}] + \rho g \pi (R^2-r^2) \cdot \hat{Z}_e + \rho g \pi (R^2-r^2) \cdot \hat{Z} & = \hat{F}_{2z}+
 \end{aligned}$$

où k_{55} ne dépend que des caractéristiques géométriques du système.

Q37) Justifier que le comportement suivant l'axe de pignonement est découplé des autres directions.

Pour la suite, on ne s'intéresse qu'aux équations d'inconnues \hat{Z}_e et \hat{Z} . En utilisant le changement de variable $\hat{Z} = \hat{Z}_e - \hat{Z}_f$, on pose X le vecteur des positions inconnues tel que $X^T = (\hat{Z}_e \ \hat{Z}_f)^T$. Par combinaison linéaire sur le système d'équations précédent, il est possible de montrer que le vecteur X est solution du système

$$[-(M+A)\omega^2 + j\omega B + K] \cdot X = \begin{pmatrix} \hat{F}_{1z} \\ \hat{F}_{2z} \end{pmatrix} + \hat{F}_u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

avec $M = \begin{pmatrix} m_E & 0 \\ 0 & m_F \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} \rho g \pi r^2 & 0 \\ 0 & \rho g \pi (R^2 - r^2) \end{pmatrix}$.

Les matrices A et B ne dépendent respectivement que des coefficients a_{ij} et b_{ij} . Afin de faciliter l'étude du contrôle du système il est usuel de prendre les vitesses comme inconnues du problème à résoudre.

Q38) A partir de l'équation précédente, déterminer la matrice H telle que $H \cdot V = \begin{pmatrix} \hat{F}_{1z} - \hat{F}_u \\ \hat{F}_{2z} + \hat{F}_u \end{pmatrix}$ (7)

avec $V = (\hat{V}_e \ \hat{V}_f)^T$ le vecteur d'inconnues contenant les amplitudes complexes de $\dot{z}_e(t)$ et $\dot{z}_f(t)$. Vous exprimerez H en fonction de M , A , B , K et ω .

La résolution à différentes fréquences des équations (6) et (7) permet de construire les graphes de réponse en amplitude pour des houles régulières d'amplitude a : on s'impose alors $\hat{F}_u = 0$. Dans le domaine de l'offshore, ces courbes sont appelées RAO pour Response Amplitude Operator. Dans le cadre de la théorie linéaire, les déplacements de l'embase et du flotteur sont donnés en mètre par mètre d'amplitude de houle. Les RAO en position et en vitesse pour l'objet de l'étude sont donnés figure 12.

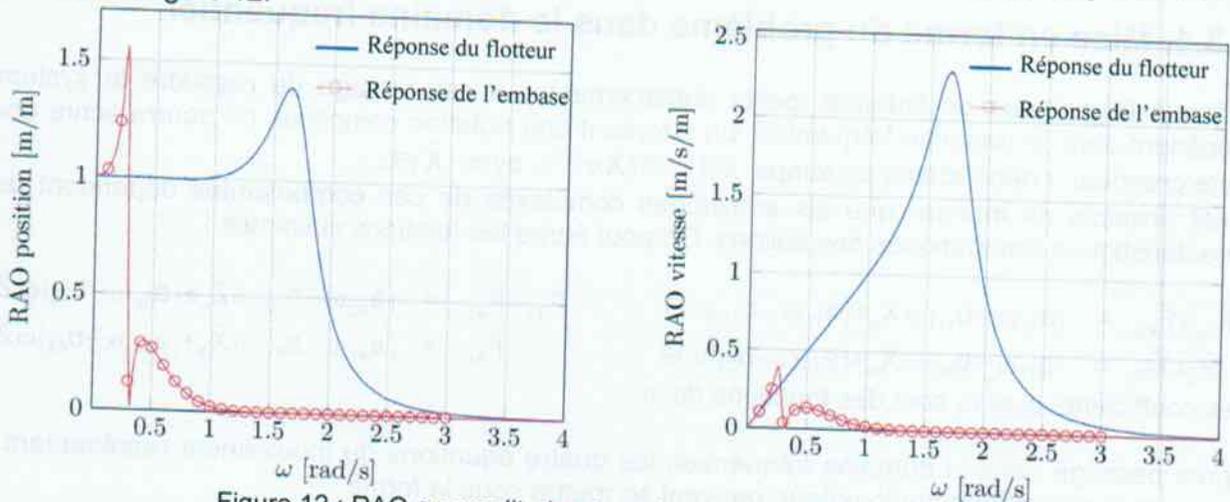


Figure 12 : RAO en amplitude et en vitesse pour l'houlogénérateur.

Q39) Interpréter les courbes de la figure 12, notamment par le comportement basse fréquence. Quelle est la fréquence optimale de la houle pour la récupération d'énergie ?

4. Récupération optimale de l'énergie des vagues

Les parties précédentes ont montré que le mouvement du flotteur du système PB150 POWERBUOY était géré par des équations complexes, faisant intervenir plusieurs physiques. Néanmoins, à l'instar de tout système mécanique possédant un degré de liberté, son mouvement peut être piloté pour pouvoir récupérer un maximum d'énergie fournie par la force qui le met en mouvement. Cette partie vise à étudier conceptuellement la stratégie de commande permettant cette récupération énergétique optimale.

Pour simplifier l'étude, le problème est considéré unidirectionnel. Le flotteur se déplace verticalement, et sa vitesse verticale est notée $V_r(t)$. Il subit une force verticale $F(t)$ qui peut se décomposer en $F(t) = F_h(t) + F_u(t)$ où $F_h(t)$ est la force de la houle, et $F_u(t)$ la force que lui fournit tout le système qui met en rotation le moteur synchrone. L'énergie que le flotteur transmet à toute la chaîne de motorisation est $E_u = - \int_{-\infty}^{+\infty} F_u(t) V_r(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (F_h(t) - F(t)) V_r(t) dt$. Tous les signaux physiques sont réels.

On note $\check{X}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt$ la transformée de Fourier de la fonction X . Le théorème de Parseval permet de démontrer que pour toutes fonctions $X: t \rightarrow X(t)$ et $Y: t \rightarrow Y(t)$ à valeurs dans \mathbb{R} , on a $\int_{-\infty}^{+\infty} X(t) Y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \check{X}(\omega) \check{Y}(-\omega) d\omega$.

Q40) Démontrer que l'énergie fournie par le flotteur à la chaîne de motorisation peut s'écrire

$$E_u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \check{F}_h(\omega) \check{V}_r^*(\omega) - \check{F}(\omega) \check{V}_r^*(\omega) d\omega \text{ où } \check{V}_r^* \text{ est le complexe conjugué de } \check{V}_r.$$

Q41) Démontrer que l'énergie fournie par le flotteur à la chaîne de motorisation peut aussi s'écrire

$$E_u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \check{F}_h(\omega) \check{V}_r^*(\omega) + \check{F}_h^*(\omega) \check{V}_r(\omega) - \check{F}(\omega) \check{V}_r^*(\omega) - \check{F}^*(\omega) \check{V}_r(\omega) d\omega.$$

On a montré que le comportement dynamique du système est modélisé par l'équation $(j\omega M + D - jK/\omega) \check{V}_r(\omega) = \check{F}(\omega)$, où M représente le terme de masse, D le terme d'amortissement et K le terme de raideur.

Q42) Vérifier que l'énergie fournie par le flotteur à la chaîne de motorisation peut aussi s'écrire :

$$E_u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{|\check{F}_h|^2}{2D} - \frac{\alpha(\omega)}{2D} d\omega$$

$$\text{avec } \alpha(\omega) = \check{F}_h(\omega) \check{F}_h^*(\omega) + 2D(\check{F}_u(\omega) \check{V}_r^*(\omega) + \check{F}_u^*(\omega) \check{V}_r(\omega)).$$

Q43) Démontrer que $\alpha(\omega) = ((j\omega M + D - jK/\omega)^* \check{V}_r(\omega) + \check{F}_u(\omega)) ((j\omega M + D - jK/\omega) \check{V}_r(\omega) + \check{F}_u(\omega))^*$.

Q44) En déduire que l'énergie maximale que le système peut récupérer du mouvement de la

houle est $E_{u, \max} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{|\check{F}_h|^2}{2D} d\omega$, et indiquer pour quelle valeur de l'effort \check{F}_u elle est atteinte.

Q45) Représenter le schéma bloc du système permettant d'aboutir à un contrôle de la vitesse de déplacement du flotteur tel que l'énergie des vagues soit récupérée au maximum. L'entrée de ce schéma bloc sera \check{F}_h , et la sortie \check{V}_r . Ne mettre qu'un seul bloc dans la chaîne directe et qu'un seul bloc dans la chaîne de retour.

5. Mesure du courant créé

Le système houlomoteur étudié a pour finalité de fournir de l'énergie au réseau électrique, par transformation de l'énergie issue des vagues. La figure 4 illustre son architecture et notamment la chaîne de conversion électromécanique. Sur ce schéma, on se rend compte que l'énergie houlomotrice met en mouvement un système mécanique, qui fait tourner un moteur synchrone à aimants permanents. Le courant créé par ce moteur est redressé par des convertisseurs électriques statiques et est modifié avant d'être injecté sur le réseau. Afin d'optimiser cette chaîne de transmission énergétique, il est indispensable de mesurer proprement le courant en sortie du moteur. L'objet de cette partie consiste à modéliser la chaîne de mesure de ce courant, afin de l'optimiser.

- 1 : enroulement de N_s spires, résistance nulle, inductance propre nulle
- 2 : circuit magnétique en forme de tore, longueur moyenne L , section S , perméabilité magnétique infinie
- 3 : capteur à effet Hall, qui couvre tout l'entrefer, épaisseur e , perméabilité magnétique μ_c
- 4 : amplificateur de tension, fonction de transfert H_4
- 5 : enroulement de N_s spires, résistance R_s , inductance propre L_s
- 6 : résistance de mesure R_m

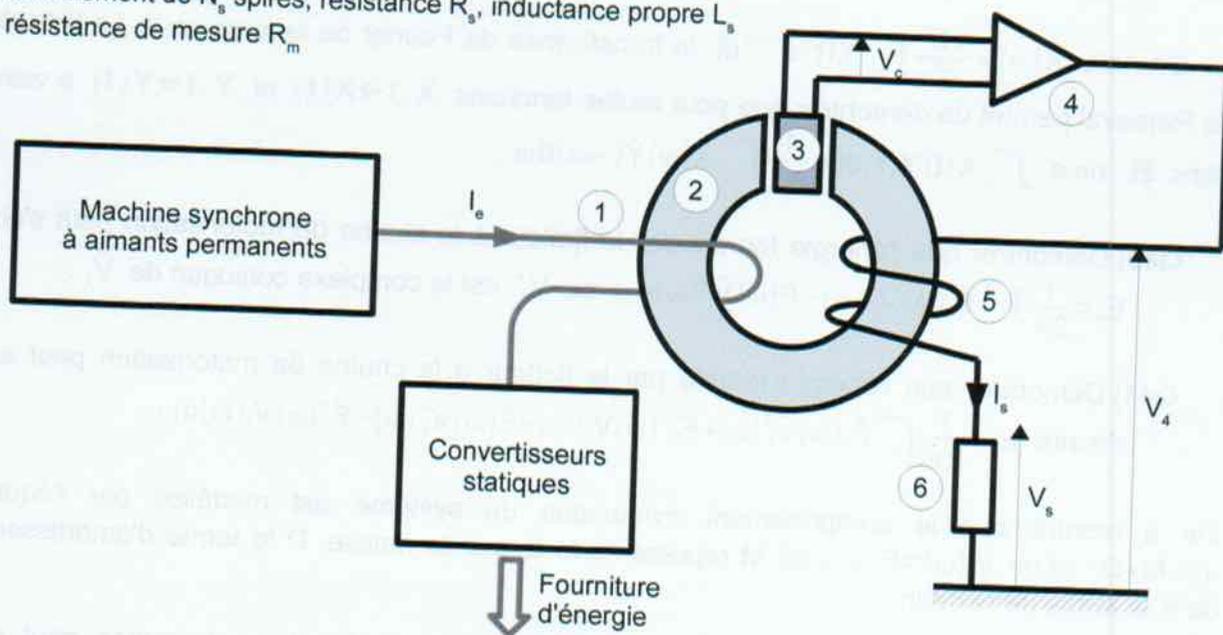


Figure 13 : Schéma de principe de la mesure du courant à la sortie du moteur synchrone.

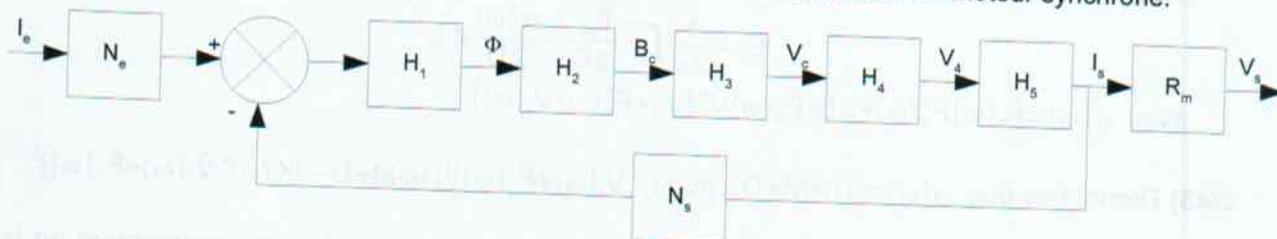


Figure 14 : Modélisation par schéma bloc de la mesure du courant. La fonction de transfert $H_3(p)$ est une constante de valeur $H_3(p) = K_3$. On note B_c le champ magnétique dans le capteur à effet Hall.

Le schéma de principe de la mesure du courant à la sortie du moteur synchrone est représenté sur la figure 13. Sur ce schéma, on retient la convention suivante : le courant I_e (tel qu'il est dessiné par sa flèche) crée un flux positif dans le tore, et le courant I_s (tel qu'il est dessiné par sa flèche) crée un flux négatif dans le tore.

Q46) B_t représente le champ magnétique dans le tore, et B_c le champ magnétique dans le capteur à effet Hall. Déterminer une relation entre ces deux champs magnétiques.

Q47) Déterminer la valeur de l'excitation magnétique H_t dans le tore.

Q48) Déterminer l'expression du flux magnétique dans le tore, en fonction de I_e , I_s , N_e , N_s , e , S et μ_c .

La figure 14 représente une modélisation par schéma bloc de la mesure du courant.

Q49) Déterminer les expressions analytiques des fonctions de transfert H_1 , H_2 et H_3 en fonction des grandeurs physiques qui apparaissent sur la figure 13, dans le domaine de Laplace.

On suppose dans un premier temps que l'amplificateur est un simple gain pur. Par conséquent, la fonction de transfert H_4 est une constante de valeur K_4 .

Q50) Exprimer la fonction de transfert $H(p) = \frac{I_s(p)}{I_e(p)}$ et déterminer son gain K_i et sa constante de temps T_i en fonction de N_e , N_s , μ_c , R_s , R_m , L_s , e , K_3 et K_4 .

Q51) Représenter le diagramme de Bode de la fonction $H(p)$. Indiquer sur quelle plage de pulsation la mesure doit être faite pour avoir une bonne image de I_e .

L'application numérique permet d'obtenir $H(p) = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{1 + 2 \cdot 10^{-6} p}$.

Q52) La résistance de mesure valant $R_m = 200 \Omega$, déterminer la valeur numérique de la tension V_s si le moteur délivre 100 A dans le domaine des basses fréquences.

Q53) On suppose que le moteur délivre un courant sinusoïdal, de pulsation ω . Déterminer l'expression littérale de la valeur efficace maximale du courant que le moteur peut délivrer, si on souhaite limiter la valeur maximale du champ magnétique à la valeur B_{max} .

La chaîne de mesure est située juste à la sortie du moteur, donc sur le système houlomoteur, en pleine mer. Or, en pleine mer, on peut avoir des différences considérables de température, suivant qu'on est plongé dans la mer ou exposé au soleil. Par conséquent, il est nécessaire que le système de mesure du courant soit insensible à une perturbation extérieure telle que la température ambiante.

Q54) Une variation de température agit surtout sur le capteur à effet Hall, et modifie la valeur numérique de K_3 à un niveau pouvant aller jusqu'à une variation $\frac{dK_3}{K_3} = \pm 10\%$. Montrer qu'actuellement le système de mesure du courant est soumis à cette perturbation.

Pour lutter contre les effets de la température dans la chaîne de mesure, on introduit le montage électronique décrit sur la figure 15. Les amplificateurs opérationnels fonctionnent en régime linéaire.

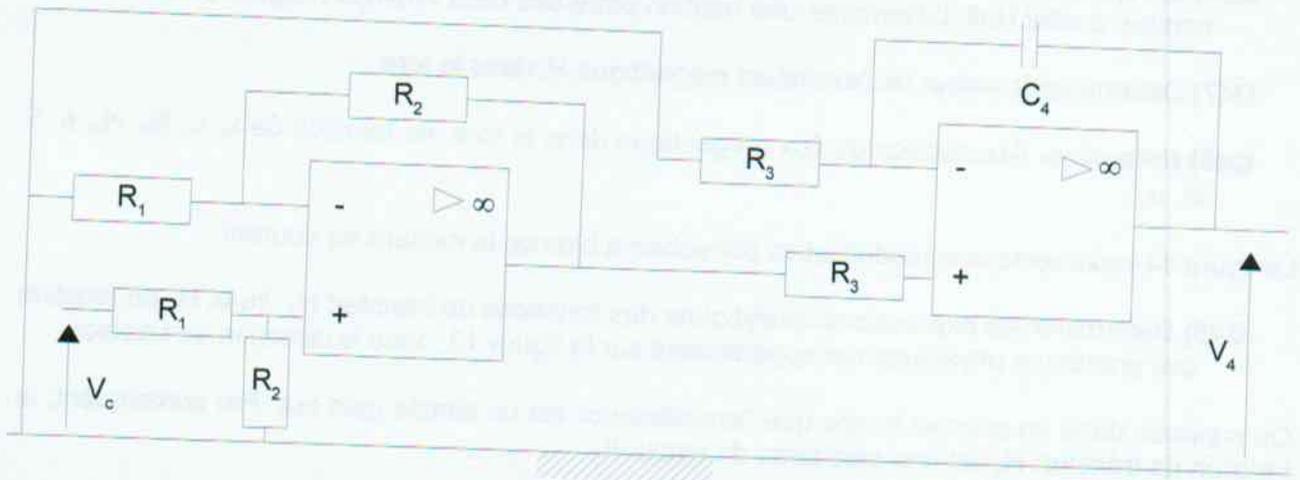


Figure 15 : montage électrique utilisé à la sortie du capteur à effet Hall.

Q55) Déterminer la nouvelle fonction de transfert $H_4(p)$.

Q56) Indiquer pourquoi la chaîne de mesure est devenue robuste vis-à-vis des variations de températures et à quelle condition le problème a été réglé.

6. Conclusion

Q57) Rappeler les objectifs des différentes parties et les conclusions associées. Mettre en évidence les limites du modèle. Comment peut on y remédier ?

Fin de l'épreuve

Remerciements

Les éléments de cette étude ont été extraits du travail de thèse du docteur OLAYA, à l'Université de Bretagne Occidentale.

Annexe 1

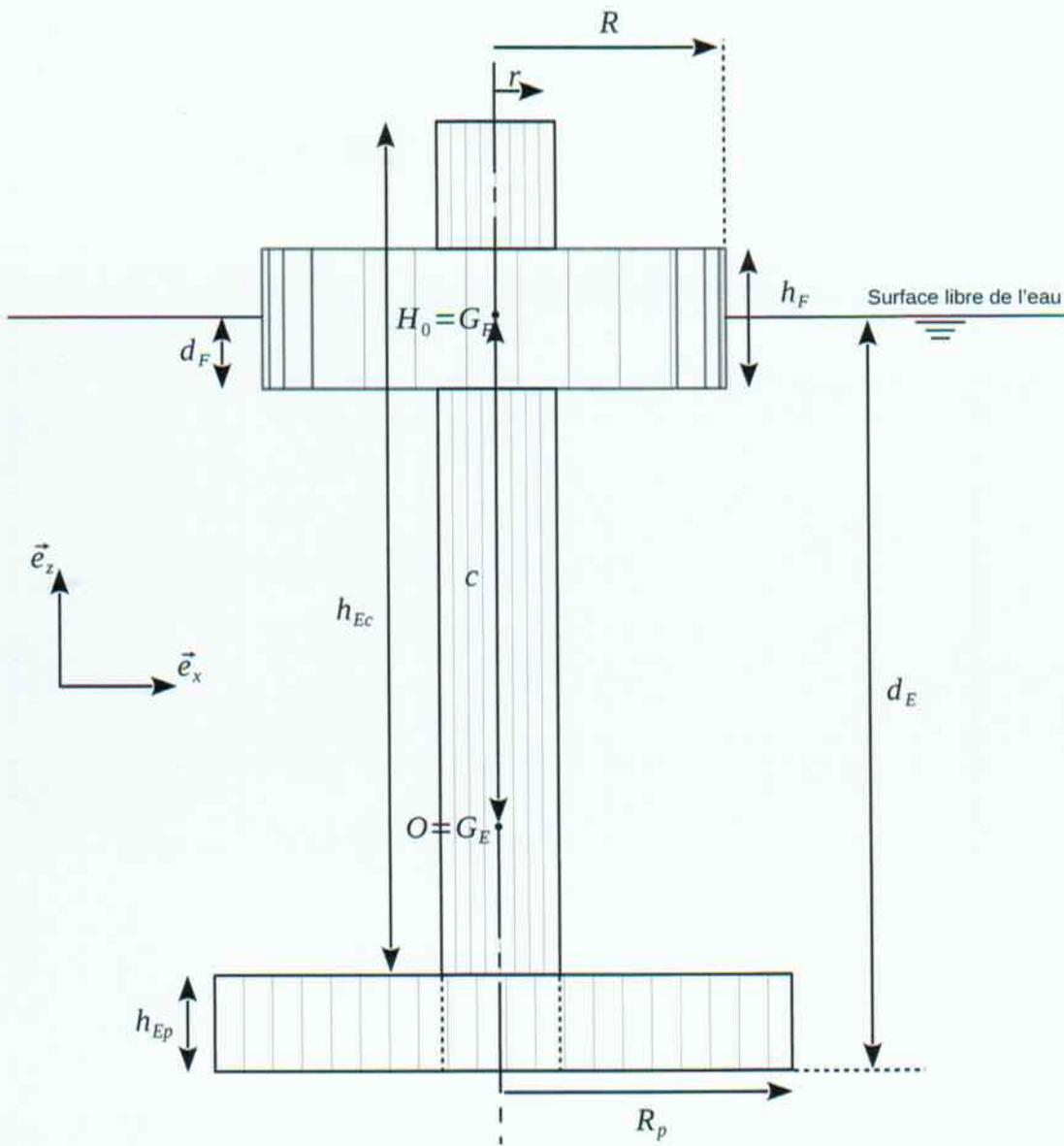


Figure 16 : Flotteur et Embase à l'équilibre

Paramètres flotteur	Symbole	Paramètres embase	Symbole
Caractéristiques géométriques			
Hauteur du flotteur	h_F	Hauteur de la colonne	$h_{E_s} + h_{E_p}$
Tirant d'eau flotteur	$d_F = h_F/2$	Hauteur du plateau	h_{E_p}
Rayon intérieur flotteur	r	Tirant d'eau embase	d_E
Rayon extérieur flotteur	R	Rayon extérieur plateau	R_p
		Rayon intérieur plateau	r
Caractéristiques d'inerties			
Masse flotteur	m_F	Masse embase	m_E
Moment d'inertie flotteur en G_F suivant \vec{e}_y	$I_{y,F}$	Moment d'inertie embase en G_E suivant \vec{e}_y	$I_{y,E}$