ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2024

MARDI 16 AVRIL 2024
14h00 – 18h00

FILIÈRE MP – Épreuve n° 4

PHYSIQUE ET SCIENCES
DE L'INGÉNIEUR (X)

Durée : 4 heures

L'utilisation de calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Cette composition ne concerne qu'une partie des candidats de la filière MP, les autres candidats effectuant parallèlement la composition d'informatique A.

Pour la filière MP, il y a donc deux enveloppes de sujets, pour cette séance.

Cette épreuve comprend deux parties indépendantes. La première porte sur l'étude des conditions de synchronisation des rebonds d'une balle sur une surface horizontale oscillant verticalement, de manière harmonique. La seconde propose d'étudier un dispositif haptique à six degrés de liberté actifs, permettant de piloter des robots à distance et d'interagir avec un environnement virtuel.

➞ *Il est conseillé de ne pas consacrer plus de deux heures par partie.*

➞ *Les applications numériques seront effectuées avec la précision qu'un calcul à la main permet aisément, et sans excéder deux chiffres significatifs. Les ordres de grandeur seront donnés avec un seul chiffre significatif.*

➞ *Les réponses aux questions relevant de considérations qualitatives devront être argumentées.*

➞ *Les références des questions abordées devront être indiquées de façon claire.*

Partie Physique

Rebonds d'une balle sur une surface en mouvement périodique

Cette étude comprend deux parties, chacune pouvant être abordée de façon indépendante. La première est consacrée à la modélisation viscoélastique d'un solide durant un choc. La seconde s'intéresse aux conditions de synchronisation des rebonds d'une balle sur une surface plane en mouvement vertical harmonique.

1 Une modélisation du comportement viscoélastique d'un solide lors d'un choc contre une surface rigide.

Le modèle adopté du solide est représenté sur la figure (**1**). Il comprend un élément indéformable (M), auquel est affectée la masse totale m du solide, en liaison avec un pied (P) par l'intermédiaire d'un élément élastique et d'un élément amortisseur agissant parallèlement. Ces derniers sont supposés sans masse et se comporter linéairement vis-à-vis du déplacement (ou déformation) s. La surface (S), fixe dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}(\mathrm{O}, x)$ (supposé galiléen), est supposée indéformable.

Nous notons k (qui a la dimension d'une force sur une longueur) la raideur de l'élément élastique et λ (qui a la dimension d'une force sur une vitesse) le coefficient d'amortissement ($k > 0$ et $\lambda > 0$). Sur la figure (**1**)-(**a**), le solide n'est pas en contact avec la surface, il se déplace à la vitesse $\vec{V_0} = V_0\,\vec{e}_x$ ($V_0 = \text{Cste} > 0$) dans sa direction. La figure (**1**)-(**b**) représente la situation lors du choc. La distance d définit l'origine du déplacement s du solide (c'est la longueur du solide non déformé). L'action de la pesanteur n'est pas prise en compte dans cette modélisation.

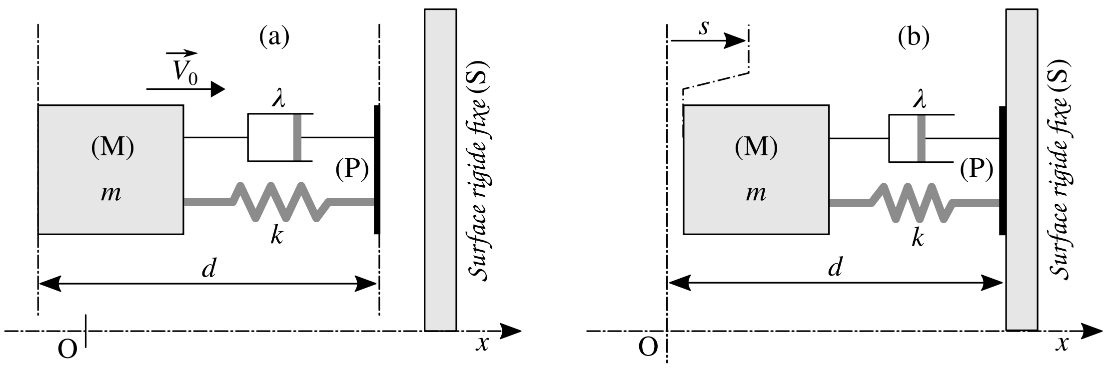

FIGURE **1** – Modélisation viscoélastique d'un solide : (a) Solide non déformé en progression à vitesse constante $\vec{V_0} = V_0\,\vec{e}_x$ en direction de la surface rigide fixe (S) ; (b) Déformation du solide durant la phase de son contact avec la surface (S). Cette déformation est paramétrée par l'abscisse s.

Nous posons $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $\alpha = \dfrac{\lambda}{2\sqrt{km}}$. Nous supposons que $\alpha < 1$.

1. Établir l'expression de la dépendance temporelle $s = s(t)$ du déplacement de l'élément (M) au cours du choc. On indiquera l'intervalle de temps $\mathrm{I_c}$ sur lequel cette dépendance doit être considérée. On fera intervenir les constantes ω_0, α et V_0.

2. Nous notons $\vec{V_1} = V_1\,\vec{e}_x$ la vitesse du solide après la phase de rebond sur la surface rigide. Établir que le coefficient de restitution en vitesse r, défini par le rapport $r = -V_1/V_0$, s'exprime selon la relation suivante :

$$r = \exp\left(-\frac{\alpha\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right) \qquad (\mathbf{1})$$

Commenter cette expression. Expliquer pourquoi r ne dépend pas de la vitesse initiale V_0.

3. Il s'agit d'accéder à la valeur du coefficient de restitution en vitesse r caractérisant les rebonds d'une balle de tennis de table sur une surface rigide horizontale et immobile. À cette fin, on effectue un lâché vertical, dans le champ de pesanteur, de la balle depuis une hauteur initiale h_0. On détecte les impacts à l'aide d'un microphone.

La figure (**2**) représente la dépendance du temps de vol $\tau_n = t_{n+1} - t_n$, relatif au rebond n ($n \geq 1$), de la balle entre ses impacts n (instant t_n) et $n+1$ (instant t_{n+1}) contre la surface. La hauteur h_0 est choisie de telle manière qu'elle n'induise pas de retournement de la convexité (flambage) de la surface-enveloppe de la balle, au cours du choc. Par ailleurs, nous nous plaçons sur un intervalle de temps tel que l'on peut négliger la durée du choc devant chacun des temps de vol considérés.

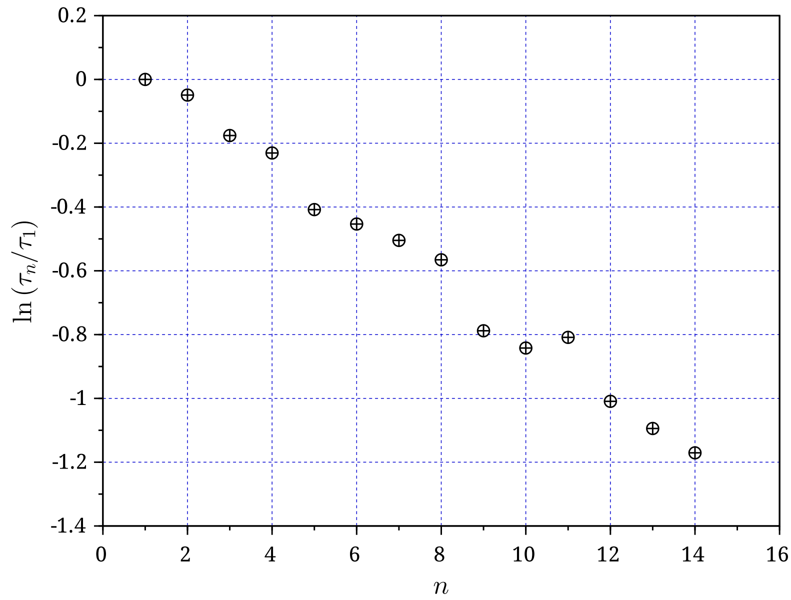

FIGURE **2** – Durée $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ du rebond n ($n \geq 1$), entre les impacts n et $n+1$ de la balle contre la surface, en fonction de n (représentation dans le système de coordonnées linéaire-logarithmique).

Exprimer, dans le cadre du modèle adopté (illustré sur la figure (**1**)), la dépendance de la variable $\ln(\tau_n/\tau_1)$ en fonction du coefficient r et de n.

Ce modèle paraît-il en accord avec les résultats présentés sur la figure (**2**) (pour la gamme de vitesses d'impact considérée) ?

Estimer, à partir de ce tracé, la valeur du coefficient de restitution en vitesse r.

2 Synchronisation des rebonds d'une balle sur une surface en mouvement vertical oscillant.

Nous nous proposons d'étudier les rebonds d'une balle de tennis de table sur une surface rigide qui oscille verticalement, de façon sinusoïdale. En pratique, cette surface est fixée sur la partie mobile (noyau) d'un pot vibrant [1]. Ce dernier est commandé en courant par l'intermédiaire d'un amplificateur de puissance commandé par un générateur de tension sinusoïdale [2]. Le paramétrage du système constitué de la surface rigide (S) oscillant verticalement et de la balle (B) est représenté sur la figure (**3**).

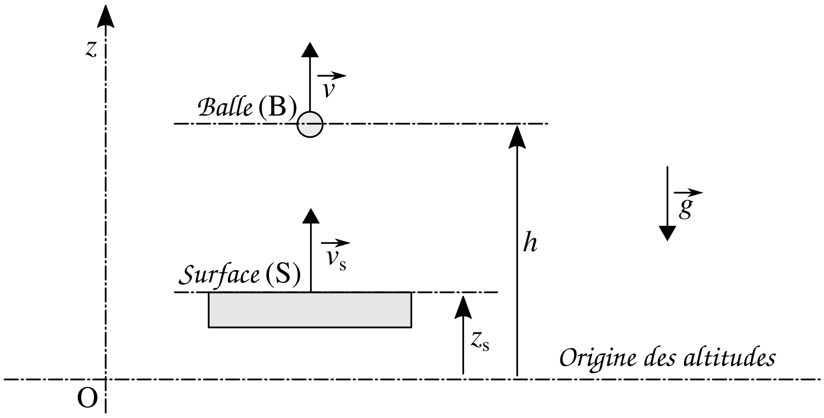

FIGURE **3** – Système constitué de la surface rigide (S) en mouvement vertical ($z_s = z_s(t)$) et de la balle (B) en mouvement balistique ($h = h(t)$) dans le champ de pesanteur $\vec{g}$.

• Nous notons :

- $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathrm{O}, z)$, le référentiel d'étude, supposé galiléen (ce n'est plus celui utilisé dans la partie (**1**)) ;
- $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$, l'accélération de la pesanteur ;
- m, la masse de la balle ;
- z_s et $\vec{v}_s = v_s\,\vec{e}_z$ ($v_s = \dot{z}_s$), respectivement l'altitude et la vitesse de la surface mobile ;
- h et $\vec{v} = v\,\vec{e}_z$ ($v = \dot{h}$), respectivement l'altitude et la vitesse de la balle ;
- $\vec{v}^- = v^-\,\vec{e}_z$ ($v^- < 0$) et $\vec{v}^+ = v^+\,\vec{e}_z$, respectivement les vitesses de la balle immédiatement avant et après un choc contre la surface ;
- r ($r \in]0, 1[$), le coefficient de restitution en vitesse caractérisant le choc entre la balle (B) et la surface rigide (S) ($r = -v^+/v^-$ dans le cas particulier où $v_s = 0$). Ce coefficient est supposé indépendant de la vitesse d'impact.

• Nous considérons que les chocs entre la surface et la balle sont "instantanés" et, par ailleurs, qu'ils ne perturbent pas le mouvement de la surface [3]. L'évolution temporelle $z_s = z_s(t)$ de son altitude est donc imposée par la différence de potentiel délivrée par le générateur, indépendamment de l'action qu'exerce la balle sur la surface lors d'un choc.

4. Établir que la vitesse v^+ de la balle s'exprime selon la relation suivante :

$$v^+ = -rv^- + (1 + r)v_s(t_i) \qquad \textbf{(2)}$$

où t_i est l'instant de l'impact balle-surface considéré.

2.1 Condition de synchronisation.

Il s'agit de déterminer à quelle condition les rebonds de la balle (B), sur la surface (S) oscillant verticalement de façon sinusoïdale, sont synchronisés sur le mouvement de cette dernière. La figure (**4**) donne une illustration, dans un cas quelconque, des évolutions temporelles $z_s = z_s(t)$ et $h = h(t)$ des altitudes respectives de la surface en mouvement et de la balle, centrées sur le rebond n.

1. Un pot vibrant possède une structure analogue à celle d'un haut-parleur électrodynamique.
2. Afin d'assurer la stabilité des rebonds dans le plan horizontal, la balle peut être guidée par un tube en plexiglass. On peut également utiliser une surface (S) présentant une légère concavité.
3. La masse de l'ensemble mobile constitué de la surface et du noyau du pot vibrant est très supérieure à celle de la balle.

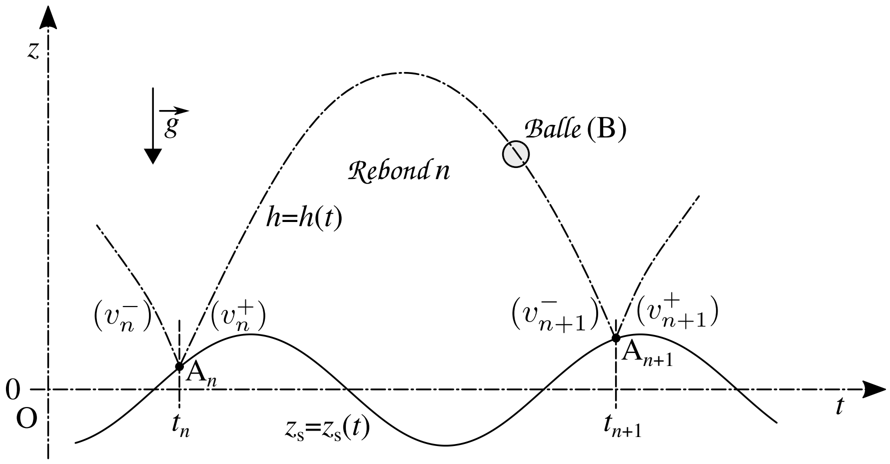

FIGURE **4** – Rebond n, de l'impact A_n à l'impact A_{n+1}, de la balle (B) sur la surface (S) oscillant verticalement et sinusoïdalement (la situation de rebond est quelconque).

- Nous notons :
  - t_n, l'instant correspondant à l'impact A_n numéro n ;
  - $\vec{v}_n^- = v_n^- \, \vec{e}_z$ ($v_n^- < 0$) et $\vec{v}_n^+ = v_n^+ \, \vec{e}_z$, respectivement les vitesses de la balle immédiatement avant et après l'impact n ;
  - $z_s(t) = a \sin \omega t$ ($a = \text{Cste} > 0, \omega = \text{Cste} > 0$), l'évolution temporelle de l'altitude de la surface ;
  - $\phi = \omega t$; $\phi_n = \omega t_n$; $T = 2\pi/\omega$; $\Gamma = a\omega^2/g$.

5. Nous nous plaçons dans une situation générale telle que celle illustrée sur la figure (**4**) (c'est-à-dire que les rebonds ne sont pas nécessairement synchronisés). Nous considérons un rebond n, de l'impact $A_n(t_n)$ à l'impact $A_{n+1}(t_{n+1})$. Nous notons $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ le temps de vol de la balle durant ce rebond.

Exprimer les dépendances suivantes :

- La vitesse v_n^+ en fonction de v_n^-, ϕ_n et des paramètres r, a et ω ;
- L'altitude $z_s(t_{n+1})$ en fonction de $z_s(t_n)$, v_n^+, τ_n et g ;
- La vitesse v_{n+1}^- en fonction de v_n^+, τ_n et g ;
- La vitesse v_{n+1}^+ en fonction de v_n^+, τ_n, ϕ_{n+1} et des paramètres g, r, a et ω.

Ces relations générales seront utilisées dans la suite de cette étude.

6. Nous supposons que les rebonds de la balle sont synchronisés sur le mouvement sinusoïdal de la surface. Établir alors que le cosinus de la phase ϕ_n des impacts vérifie l'égalité suivante :

$$\cos \phi_n = \frac{1-r}{1+r} \times \frac{\pi}{\Gamma} \qquad (\mathbf{3})$$

Donner l'expression correspondante de la vitesse v_n^+ en fonction des constantes g et ω.

7. Analyser la relation (**3**). On envisagera, en particulier, la situation limite pour laquelle $r \to 1^-$.

8. La figure (**5**) représente l'évolution temporelle de l'altitude $z_s = a \sin \omega t$ de la surface (S). En correspondance est également représentée celle du signal délivré par le microphone détectant le son produit par les chocs de la balle contre la surface. Ce signal prend la forme d'une série d'impulsions. Étant représenté en unité arbitraire, son échelle n'est pas indiquée sur la figure. La valeur de la pulsation, correspondant à ces résultats, est $\omega = 2\pi \times 25 \simeq 157$ rad·s^{-1}.

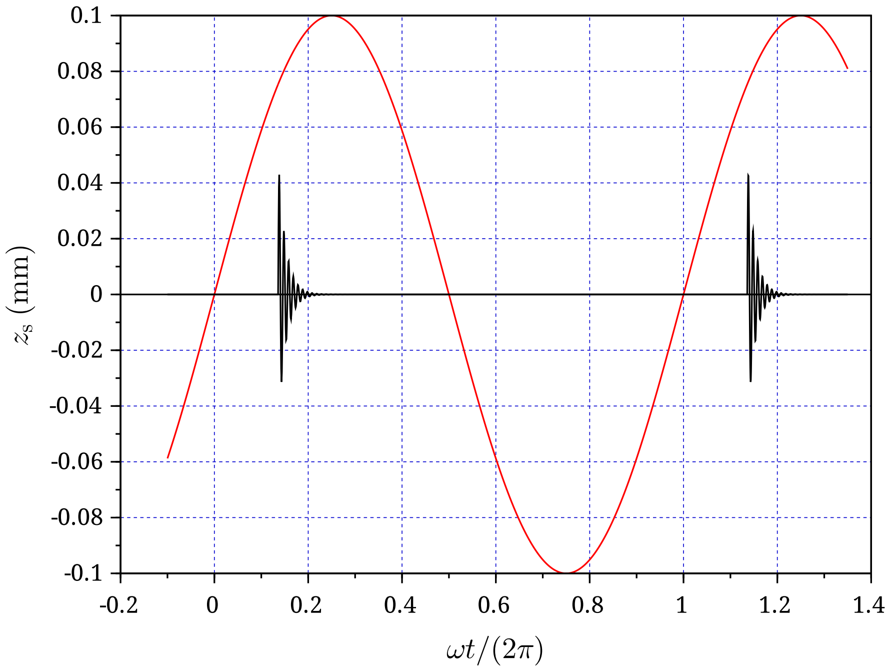

FIGURE **5** – Évolution temporelle de l'altitude $z_s = a \sin \omega t$ de la surface (S) et celle du signal de détection des chocs de la balle contre cette dernière ($\omega = 2\pi \times 25 \simeq 157$ rad·s^{-1}). Sur l'intervalle de temps considéré, ce signal fait apparaître deux impulsions correspondant, chacune, à un choc.

Estimer, à partir de ces données, la valeur du coefficient de restitution en vitesse r. Afin de faciliter les calculs numériques, on tirera parti des indications suivantes : la valeur de r est proche de l'unité et celle de ϕ_n proche de $\pi/4$.

2.2 Condition de stabilité.

Nous nous proposons d'analyser la stabilité de la situation de synchronisation des rebonds sur la période T des oscillations harmoniques de la surface. Pour cela, nous supposons que l'instant d'impact et la vitesse de la balle immédiatement après cet instant s'écartent légèrement de la condition de synchronisation. La figure (**6**), centrée sur le rebond n, illustre cette situation.

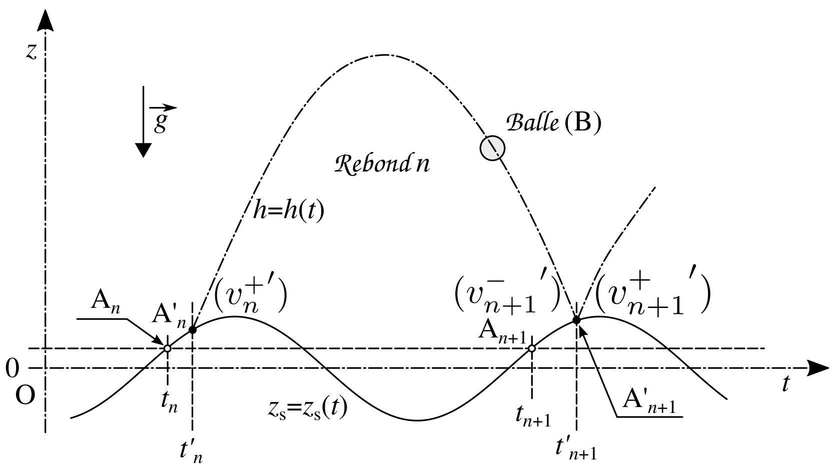

FIGURE **6** – Rebond n, de l'impact A'_n à l'impact A'_{n+1}, de la balle (B) sur la surface (S) oscillant verticalement et sinusoïdalement : situation s'écartant légèrement de la condition de synchronisme correspondant à la suite (A_n) des impacts.

Les variables $(t'_n, {v_n^+}', ...)$ auxquelles est affecté le signe $'$ se rapportent à la situation pour laquelle les rebonds sont légèrement désynchronisés par rapport au mouvement périodique de la surface. Les autres $(t_n, v_n^+, ...)$ correspondent à la situation de synchronisme étudiée dans la section (**2.1**).

Indication : Pour traiter les questions (**9**) *et* (**10**), *on s'appuiera sur les résultats généraux établis en réponse à la question* (**5**).

9. Nous considérons le rebond n de la balle entre les impacts A'_n et A'_{n+1}. Établir la relation liant les phases $\phi'_{n+1} = \omega t'_{n+1}$ et $\phi'_n = \omega t'_n$. Cette relation fait intervenir la vitesse ${v_n^+}'$ et les constantes g, a et ω.

10. Pour le rebond n, exprimer la vitesse ${v_{n+1}^+}'$ en fonction de ${v_n^+}'$, ϕ'_{n+1}, ϕ'_n et des paramètres r, g, a et ω.

• Afin d'étudier la stabilité de la situation pour laquelle les rebonds sont synchronisés, nous considérons que chaque impact A'_n reste voisin de son correspondant "synchronisé" A_n. Écrivons alors les variables ϕ'_n et ${v_n^+}'$ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \phi'_n = \phi_n + 2\pi\varepsilon_n & \text{où} \quad |\varepsilon_n| \ll 1 \\ {v_n^+}' = v_n^+ \left(1 + \eta_n\right) & \text{où} \quad |\eta_n| \ll 1 \end{cases} \tag{4}$$

Il s'agit d'étudier les propriétés des suites (ε_n) et (η_n). Dans cette étude perturbative, toutes les fonctions et équations seront développées au voisinage de la situation de synchronisme (ϕ_n, v_n^+), en se limitant au premier ordre vis-à-vis des termes d'écart ε_n et η_n.

Dans ces conditions, le développement des relations obtenues en réponse aux questions (**9**) et (**10**) conduit aux relations de récurrence linéaires suivantes :

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{1+r}{2}\,\eta_n \tag{5}$$

$$\eta_{n+1} = -\left(2\pi(1-r)\tan\phi_n\right)\varepsilon_n + \left(r^2 - \pi(1-r^2)\tan\phi_n\right)\eta_n \quad (\tan\phi_n = \text{Cste}) \tag{6}$$

Afin de rendre ces relations plus aisément maniables, nous les écrivons sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1} = A\varepsilon_n + B\eta_n & \text{où} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \\ \eta_{n+1} = C\varepsilon_n + D\eta_n & \text{où} \quad (C,D) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{7}$$

Par ailleurs, nous les étendons aux suites complexes $(\underline{\varepsilon}_n)$ et $(\underline{\eta}_n)$ telles $\varepsilon_n = \mathrm{Re}(\underline{\varepsilon}_n)$ et $\eta_n = \mathrm{Im}(\underline{\eta}_n)$.

11. Former la relation de récurrence ne portant que sur des termes de la suite $(\underline{\varepsilon}_n)$, liant $\underline{\varepsilon}_{n+2}$, $\underline{\varepsilon}_{n+1}$ et $\underline{\varepsilon}_n$. On conservera les paramètres A, B, C et D sans expliciter leur dépendance vis-à-vis des paramètres r et $\tan\phi_n$.

• Nous recherchons les solutions générales de cette suite récurrente linéaire du deuxième ordre sous la forme suivante :

$$\underline{\varepsilon}_n = K\mu^n \quad \text{où} \quad K = \text{Cste} \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \mu = \text{Cste} \in \mathbb{C} \tag{8}$$

12. Indiquer à quelle condition générale, portant sur la raison μ, la suite $(\underline{\varepsilon}_n)$ converge vers zéro.

13. Établir que la raison μ vérifie l'équation algébrique suivante :

$$\mu^2 - 2Qr\mu + r^2 = 0 \tag{9}$$

On exprimera le produit $2Qr$ en fonction des constantes r et $\tan\phi_n$.

14. Nous nous plaçons dans le cas où $Q \in \mathcal{D}_1 = [-1, +1]$. Exprimer, en fonction de r et Q, les solutions μ_- et μ_+ de l'équation (**9**). Analyser le comportement correspondant de la suite (ε_n). Préciser quelle en est la conséquence sur la stabilité de la situation de synchronisation des rebonds, dans ce cas.

- Nous envisageons le cas où $Q \in \mathcal{D}_2 =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

15. Exprimer, en fonction de r et Q, les solutions μ_- et μ_+ de l'équation (**9**). Représenter l'allure graphique de la dépendance de chacune d'elles vis-à-vis du paramètre Q.

16. En s'appuyant sur l'allure des représentations graphiques des dépendances $\mu_+ = \mu_+(Q)$ et $\mu_- = \mu_-(Q)$, déterminer la condition de stabilité des rebonds synchronisés, sur le domaine $\mathcal{D}_2$. On fera porter cette condition sur le produit $2Qr$.

17. Établir que la condition de stabilité de la situation pour laquelle les rebonds sont synchronisés, sur la réunion des deux domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, prend la forme suivante :

$$0 < \tan\phi_n < F(r) \quad \text{où} \quad F(r) = \frac{2(1+r^2)}{\pi(1-r^2)} \quad (0 \leq r < 1) \qquad (\mathbf{10})$$

Interpréter ce résultat. On s'interrogera, en particulier, sur la signification attribuable à l'inégalité de gauche, puis à celle de droite au vu de la dépendance de la fonction F vis-à-vis du coefficient r.

18. La double inégalité (**10**), adjointe à la relation (**3**), conduit à la condition suivante portant sur le paramètre Γ (ce paramètre fut introduit dans le préambule de la section (**2.1**)) :

$$\Gamma_{\text{min}} = \pi\left(\frac{1-r}{1+r}\right) < \Gamma < \pi\left(\frac{1-r}{1+r}\right)\sqrt{1+F^2} = \Gamma_{\text{max}} \quad (0 \leq r < 1\ ;\ \Gamma = a\omega^2/g) \qquad (\mathbf{11})$$

Elle définit à quelle condition il est possible d'observer des rebonds synchronisés sur la période T du mouvement oscillant de la surface. Dans cette situation, le mouvement de la balle est donc également périodique, et de même période T.

Représenter, dans le plan $(X = g/\omega^2, Y = a)$, le domaine de stabilité correspondant. Interpréter (qualitativement) l'existence d'un encadrement du paramètre Γ.

❒ *Pour approfondir cette étude : Lorsque le paramètre Γ franchit la frontière Γ_{max} (relation (**11**)), mais tout en restant en deçà d'un nouveau seuil $\Gamma_{\text{max},2}$, il apparaît que deux rebonds deviennent nécessaires pour définir un motif périodique du mouvement de la balle. C'est le phénomène de doublement de période (le mouvement de la balle est périodique, de période $2T$). Les phases ϕ_n d'impact prennent des valeurs qui s'alternent régulièrement de part et d'autre d'une phase moyenne (modulo 2π). Au delà de $\Gamma_{\text{max},2}$ il apparaît un nouveau doublement de période (le mouvement de la balle est périodique, de période $4T$) et ainsi de suite, jusqu'au chaos où le mouvement de la balle perd toute régularité.*