Michel **Antoine**, *Ph.D.*
PHYSIQUE THÉORIQUE

CAEN
NORMANDIE

Programme de Colles

Quinzaine n°02

du lundi 30 septembre au vendredi 11 octobre 2024

1 Électromagnétisme

1.1 Outils mathématiques d'analyse vectorielle dans $\mathbb{R}^3$

Aucune démonstration n'est exigible. Toute question de cours sur cette partie est exclue.

— coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques : vecteur position, déplacement élémentaire ;

Coordonnées	cartésiennes	cylindriques	sphériques ($0 \leq \theta < \pi$ et : $0 \leq \varphi < 2\pi$)
$\overrightarrow{OM}$	$x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$	$r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z$	$r\,\vec{u}_r$
$\overrightarrow{dM}$	$dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z$	$dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z$	$dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$

— différentielle df ; gradient ; relation :

$$df(M) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(M)\cdot\overrightarrow{dM} \tag{1.1}$$

— opérateur différentiel linéaire nabla $\vec{\nabla}$;

1.2 Électrostatique

1.2.1 Charges ponctuelles

— balance de Coulomb ; loi de force de Coulomb entre deux charges ponctuelles séparées par une distance r :

$$\vec{F}_{1\to2} = \frac{q_1\,q_2}{4\pi\epsilon_0\,r^2}\,\vec{u}_{1\to2} = \frac{q_1\,q_2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^3} \tag{1.2}$$

— champ coulombien au point M crée par une charge ponctuelle q placée en O :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\,r^2}\,\vec{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3} \tag{1.3}$$

— force exercée sur une charge-test q_0 placée au point M :

$$\vec{F}_{\to q_0} = q_0\,\vec{E}(M) \tag{1.4}$$

— champ et potentiel électrostatique ; relation locale :

$$\vec{E}(M) = -\,\vec{\nabla}\,V(M) \tag{1.5}$$

surfaces équipotentielles ; propriété : le champ $\vec{E}(M)$ est *perpendiculaire* aux surfaces équipotentielles, dirigé dans le sens des potentiels *décroissants* ;

— potentiel coulombien crée par une charge ponctuelle q placée en O (avec la condition aux limites : $V \to 0$ à l'infini) :

$$\boxed{V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}} \tag{1.6}$$

— lignes de champs :

$$\boxed{\overrightarrow{dM} = \lambda\,\vec{E}(M)} \tag{1.7}$$

On peut également écrire : $\overrightarrow{dM} \wedge \vec{E}(M) = \vec{0}$

— champ $\vec{E}(M)$ à circulation conservative :

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{E}(M)\cdot\overrightarrow{dM} = 0} \tag{1.8}$$

(c'est une conséquence du fait que le champ électrostatique dérive d'un potentiel.)

— distribution de charges ponctuelles $\mathscr{D} = \{q_k\}_{k=1,\ldots,N}$: principe de superposition :

$$\vec{E}_{\mathscr{D}}(M) = \sum_{k=1}^{N} \vec{E}_k(M) \tag{1.9}$$

— énergie potentielle d'une charge ponctuelle q placée au point M au potentiel V :

$$\boxed{E_p = q\,V(M)} \tag{1.10}$$

1.2.2 Distributions continues

— densité volumique de charges ρ ; modélisations simplifiées : densité surfacique σ, densité linéïque λ ;

— symétries continues ; conséquences des symétries planes « miroir » et des anti-symétries pour le vrai vecteur $\vec{E}(M)$;

— théorème de Gauss :

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{E}(M)\cdot\overrightarrow{d\Sigma} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}} \tag{1.11}$$

analogies avec la gravitation newtonienne ; différence (q algébrique, m positive).

— relations de continuité à la traversée d'une nappe de charges de densité surfacique σ (si nécessaire, cette relation devrait être fournie dans l'énoncé) :

$$\vec{E}_2(M) - \vec{E}_1(M) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0}\,\vec{n}_{1\to2} \tag{1.12}$$

(continuité des composantes tangentielles ; discontinuité finie des composantes normales.)

1.2.3 Dipôle électrostatique

— doublet électrique : $\mathscr{D} = \{+q \text{ en } P, -q \text{ en } N\}$; potentiel au point M crée par $\mathscr{D}$;

— notations usuelles : $\overrightarrow{NP} = a\,\vec{u}_z$; l'origine O est prise au milieu du segment NP ; on pose : $r = \|\overrightarrow{OM}\|$;

— approximation dipolaire :

$$\boxed{r \gg a} \tag{1.13}$$

— moment dipolaire électrique :

$$\boxed{\vec{p} = q\,\overrightarrow{NP}} \tag{1.14}$$

— expression du potentiel au point $M(r,\theta,\varphi)$ crée par un dipôle $\vec{p} = p\,\vec{u}_z$ placé à l'origine O :

$$\boxed{V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \tag{1.15}$$

expression intrinsèque :

$$V = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{1.16}$$

— champ électrique au point $M(r,\theta,\varphi)$ crée par un dipôle $\vec{p} = p\,\vec{u}_z$ placé à l'origine O :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\,r^3} \times \begin{pmatrix} 2\cos\theta\,\vec{u}_r \\ \sin\theta\,\vec{u}_\theta \\ 0\,\vec{u}_\varphi \end{pmatrix}} \tag{1.17}$$

expression intrinsèque :

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\,r^5} \times \left[\,3\left(\vec{p}\cdot\vec{r}\right)\vec{r} - r^2\,\vec{p}\,\right] \tag{1.18}$$

— couple subi par un dipôle placé dans un champ extérieur (expression à fournir) :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma} = \vec{p}\wedge\overrightarrow{E}} \tag{1.19}$$

associé à l'énergie potentielle (expression à fournir) :

$$\boxed{E_p = -\,\vec{p}\cdot\overrightarrow{E}} \tag{1.20}$$

— résultante des forces subie par un dipôle placé dans un champ extérieur [1] (expression à fournir) :

$$\boxed{\overrightarrow{R} = \left(\vec{p}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{E}(M)} \tag{1.22}$$

Dans un champ uniforme, cette résultante est nulle.

1.3 Magnétostatique

1.3.1 Formulation intégrale

— expérience d'Ørsted ;
— (HP) loi de Biot & Savart pour un circuit filiforme $\mathscr{C}$ quelconque :

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0\,I}{4\pi}\oint_{S\in\mathscr{C}} \frac{\overrightarrow{d\ell_S}\wedge\overrightarrow{SM}}{\|\overrightarrow{SM}\|^3} \tag{1.23}$$

ce champ dépend linéairement de l'intensité I du courant de sa source ;

— distribution $\mathscr{D} = \{\mathscr{C}_k\}_{k=1,\ldots,N}$ de circuits filiformes parcourus par des courants permanents $\{I_k\}_{k=1,\ldots,N}$, principe de superposition :

$$\overrightarrow{B}_{\mathscr{D}}(M) = \sum_{k=1}^{N}\overrightarrow{B}_k(M) \tag{1.24}$$

— symétries continues (translations, rotations) ; conséquence des symétries planes « miroir » et des anti-symétries pour le pseudo-vecteur $\overrightarrow{B}(M)$;

— théorème d'Ampère :

$$\boxed{\oint_\Gamma \overrightarrow{B}(M)\cdot\overrightarrow{dM} = \mu_0\,I_{\text{enlacé}}} \tag{1.25}$$

NB : le contour fermé Γ sur lequel on calcule la circulation du champ magnétique est en général *différent* du circuit filiforme $\mathscr{C}$ parcouru par le courant I.

1. Dans le cas particulier simple où le champ est dirigé selon $\vec{u}_x$ et où le dipôle est également dirigé selon $\vec{u}_x$, on a :

$$\vec{p}\cdot\overrightarrow{\nabla} = p\,\frac{d}{dx} \quad\Longrightarrow\quad \overrightarrow{R} = p\,\frac{dE}{dx}\,\vec{u}_x \tag{1.21}$$

— $\vec{B}(M)$ à flux conservatif (absence de monopôles magnétiques) :

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{B}(M)\cdot\overrightarrow{d\Sigma} = 0} \tag{1.26}$$

— modèle du fil rectiligne illimité ; modèle du solénoïde illimité (observation d'une discontinuité finie des composantes tangentielles de $\vec{B}$ à la traversée d'une nappe de courant surfacique) ;

— action d'un champ magnétique extérieur sur un tronçon élémentaire $\vec{d\ell}$ de circuit filiforme parcouru par un courant I et placé au point M : force de Laplace :

$$\boxed{\overrightarrow{dF}(M) = I\,\vec{d\ell}\wedge\vec{B}(M)} \tag{1.27}$$

Résultante des forces sur le circuit fermé $\mathscr{C}$ parcouru par le courant I :

$$\vec{R} = \oint_{M\in\mathscr{C}} \overrightarrow{dF}(M) = I\oint_{M\in\mathscr{C}} \vec{d\ell}\wedge\vec{B}(M) \tag{1.28}$$

Dans un champ magnétique uniforme, cette résultante est nulle.

Moment résultant par rapport à un point O des forces sur le circuit fermé $\mathscr{C}$ parcouru par le courant I :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_0 = \oint_{M\in\mathscr{C}} \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{dF}(M) \tag{1.29}$$

Dans un champ magnétique uniforme, ce moment résultant est indépendant du point O (couple).

1.3.2 Dipôle magnétostatique

— moment dipolaire magnétique $\vec{\mathfrak{m}}$ d'une spire de courant plane :

$$\boxed{\vec{\mathfrak{m}} = I\,\vec{S}} \tag{1.30}$$

champ magnétique au point $M(r,\theta,\varphi)$ crée par un dipôle $\vec{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\,\vec{u}_z$ placé à l'origine O :

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0\,\mathfrak{m}}{4\pi r^3}\times\begin{pmatrix} 2\cos\theta\,\vec{u}_r \\ \sin\theta\,\vec{u}_\theta \\ 0\,\vec{u}_\varphi \end{pmatrix}} \tag{1.31}$$

analogie avec le dipôle électrique ;

— couple subi par un dipôle placé dans un champ extérieur (expression à fournir) :

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{\mathfrak{m}}\wedge\vec{B}} \tag{1.32}$$

associé à l'énergie potentielle (expression à fournir) :

$$\boxed{E_p = -\,\vec{\mathfrak{m}}\cdot\vec{B}} \tag{1.33}$$

analogie avec le dipôle électrique ;

— résultante des forces subie par un dipôle placé dans un champ extérieur (expression à fournir) :

$$\boxed{\vec{R} = \left(\vec{\mathfrak{m}}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}(M)} \tag{1.34}$$

Dans un champ uniforme, cette résultante est nulle.

— aimant droit [2] : moment dipolaire magnétique $\vec{\mathfrak{m}}$;

2. L'origine microscopique de l'aimantation sera abordée ultérieurement dans le cours de physique quantique.