Michel **Antoine**, *Ph.D.*
PHYSIQUE THÉORIQUE

CAEN
NORMANDIE

Programme de Colles

Quinzaine n° 04

du mardi 12 au vendredi 22 novembre 2024

1 Outils mathématiques d'analyse vectorielle dans $\mathbb{R}^3$

AUCUNE DÉMONSTRATION N'EST EXIGIBLE.

— différentielle df ; gradient ; relation :

$$df(M) = \overrightarrow{\text{grad}} f(M) \cdot \overrightarrow{dM} \tag{1.1}$$

— opérateur différentiel linéaire nabla $\overrightarrow{\nabla}$;
— divergence d'un champ vectoriel [1] :

$$\text{div}\,\overrightarrow{A}(M) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} \tag{1.2}$$

flux du champ vectoriel ; formule de Stokes-Ostrogradsky :

$$\oiint_{\partial\Omega_3} \overrightarrow{A}(M) \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_{\Omega_3} \text{div}\,\overrightarrow{A}(M)\, d\tau \tag{1.3}$$

La surface fermée $\partial\Omega_3$ est orientée vers l'extérieur ; cette surface est le bord orienté du volume intérieur Ω_3. Interprétation physique de la divergence comme flux élémentaire par unité de volume [2] :

$$\delta\Phi = \text{div}\,\overrightarrow{A}(M)\, d\tau \tag{1.4}$$

— rotationnel d'un champ vectoriel [3] :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}(M) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} \tag{1.5}$$

circulation du champ vectoriel ; formule de Stokes-Ampère :

$$\oint_{\partial\Omega_2} \overrightarrow{A}(M) \cdot \overrightarrow{dM} = \iint_{\Omega_2} \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}(M) \cdot \overrightarrow{dS} \tag{1.6}$$

La surface Ω_2 est orientée à partir de son bord orienté $\partial\Omega_2$ suivant la « règle du tire-bouchon » de Maxwell ; le flux ne dépend que du contour $\partial\Omega_2$. Interprétation physique du rotationnel comme circulation élémentaire par unité de surface [4] :

$$\delta\mathscr{C} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}(M) \cdot \overrightarrow{dS} \tag{1.7}$$

— Laplaciens (scalaire et vectoriel) :

$$\Delta = \text{div}\,\overrightarrow{\text{grad}} \qquad \text{et :} \quad \overrightarrow{\Delta} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div} - \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}} \tag{1.8}$$

— d'Alembertien $\Box$ (préciser la convention de signe choisie) :

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \qquad \text{ou :} \quad \Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{1.9}$$

— lemmes de Poincaré et potentiels ;

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}} = \vec{0} \qquad \text{et :} \quad \text{div}\,\overrightarrow{\text{rot}} = 0 \tag{1.10}$$

1. Le calcul explicite du produit scalaire avec nabla n'est élémentaire qu'en coordonnées cartésiennes.
2. Permet l'expression de la divergence dans n'importe quel système de coordonnées.
3. Le calcul explicite du produit vectoriel avec nabla n'est élémentaire qu'en coordonnées cartésiennes.
4. Permet l'expression des composantes du rotationnel dans n'importe quel système de coordonnées.

2 Électrostatique

2.1 Formulation locale

— champ et potentiel électrostatique ; relation locale :

$$\boxed{\vec{E}(M) = -\vec{\nabla} V(M)} \tag{2.1}$$

— équation de Maxwell-Gauss :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}} \tag{2.2}$$

— équation de Poisson :

$$\boxed{-\Delta V(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}} \tag{2.3}$$

Cette équation aux dérivées partielles linéaire est à résoudre dans un domaine spatial $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Elle doit en générale être munie d'une *condition aux limites* sur le bord $\partial\Omega$ du domaine. Exemples physique :

— condition aux limites de Dirichlet : le potentiel est prescrit sur le bord : $V(M) = f(M)$;

— condition aux limites de Neumann : la dérivée normale du potentiel est prescrite sur le bord :

$$\frac{\partial V}{\partial n} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} V(M) = g(M) \tag{2.4}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normale unitaire au point M du bord.

— propriété du potentiel $V(M)$: lorsqu'il est défini, le potentiel électrostatique est *continu*.

— (HP) relations de continuité à la traversée d'une « nappe de charges » de densité surfacique σ (si nécessaire, cette relation devra être fournie dans l'énoncé) :

$$\vec{E}_2(M) - \vec{E}_1(M) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0}\, \vec{n}_{1\to 2} \tag{2.5}$$

(continuité des composantes tangentielles ; discontinuité finie des composantes normales.)

2.2 Applications : conducteurs à l'équilibre et condensateurs

— équilibre d'un conducteur homogène à température constante : propriétés ($\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$, $\rho_{\text{int}} = 0$, le conducteur est un volume équipotentiel) ; théorème de Coulomb :

$$\vec{E}_{\text{ext}}(M) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0}\, \vec{n}_{\text{ext}} \tag{2.6}$$

— éléments correspondants ; influence totale ; condensateur ; définition de la capacité :

$$\boxed{Q_A = C\,(V_A - V_B)} \tag{2.7}$$

exemples du condensateur plan ; construction à partir d'un plan infini uniformément chargé et du théorème de superposition ; capacité :

$$\boxed{C = \frac{\epsilon_0 S}{e}} \tag{2.8}$$

2.3 Dipôle électrique

— doublet électrique { $+q$ en P, $-q$ en N }; approximation dipolaire; moment dipolaire électrique $\vec{p} = q\,\overrightarrow{NP}$, champ électrique au point $M(r,\theta,\varphi)$ crée par un dipôle $\vec{p} = p\,\vec{u}_z$ placé à l'origine O :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\,r^3} \times \begin{pmatrix} 2\cos\theta\;\vec{u}_r \\ \sin\theta\;\vec{u}_\theta \\ 0\;\vec{u}_\varphi \end{pmatrix}} \tag{2.9}$$

— notion de développement multipolaire d'une distribution localisée; application aux édifices microscopiques (atomes, molécules);

— actions mécaniques subies par un dipôle rigide placé dans un champ extérieur *uniforme* : résultante nulle, et couple :

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}} \tag{2.10}$$

associé à l'énergie potentielle :

$$\boxed{E_p = -\,\vec{p}\cdot\vec{E}} \tag{2.11}$$

étude qualitative de la solvatation d'un ion dans un solvant polaire;

— dipôle induit par un champ extérieur; polarisabilité α :

$$\boxed{\vec{p} = \epsilon_0\,\alpha\,\vec{E}} \tag{2.12}$$

exemple du modèle d'atome de Thomson; ordre de grandeur;

— résultante des forces extérieures subie par un dipôle placé dans un champ extérieur non-uniforme :

$$\vec{R} = \left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E} \tag{2.13}$$

étude qualitative de l'évolution d'un dipôle rigide dans un champ extérieur non-uniforme;

— énergie potentielle associée à un dipôle induit :

$$E_p = -\,\frac{1}{2}\,\epsilon_0\,\alpha\,\|\vec{E}\|^2 \tag{2.14}$$

— interactions entre édifices microscopiques (atomes, molécules); forces attractives de van der Waals à « grande » distance (Keesom / Debye / London) :

$$\boxed{E_p(r) \sim -\,\frac{C_6}{r^6}} \tag{2.15}$$

où C_6 est une constante positive.

2.4 Énergie électrostatique

— densité volumique d'énergie locale :

$$\boxed{\varpi_E(M) = \frac{\epsilon_0\,E^2(M)}{2}} \tag{2.16}$$

dérivation de cette expression à partir du condensateur plan;

— énergie d'une distribution localisée; calcul explicite pour une sphère de rayon R uniformément chargée en volume (analyse dimensionnelle et construction de la distribution par apport de charges depuis l'infini) :

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{3\,q^2}{20\,\pi\,\epsilon_0\,R}} \tag{2.17}$$

modèle du noyau atomique : ordre de grandeur, nécessité de l'interaction forte.

3 Magnétostatique

3.1 Formulation locale

3.1.1 Courant électrique

— densité de courant $\vec{j}(M,t)$ (en A m^{-2}) : intensité I à travers une surface Σ orientée :

$$\boxed{I(t) = \iint_{\Sigma} \vec{j}(M,t) \cdot \overrightarrow{d\Sigma}} \tag{3.1}$$

— équation locale de conservation de la charge électrique :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0} \tag{3.2}$$

Cas du régime permanent : la densité de courant $\vec{j}(M)$ est à flux conservatif :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j}(M) = 0} \tag{3.3}$$

— (HP) modélisation d'une « nappe de courant » décrite par une densité surfacique de courant $\vec{j}_s(M,t)$;
— modèle classique de Drude ; conductivité γ (en S m^{-1}) ; loi d'Ohm locale :

$$\boxed{\vec{j}(M) = \gamma\, \vec{E}(M)} \tag{3.4}$$

résistance d'un tronçon de conducteur ohmique de longueur L et de section d'aire S :

$$\boxed{R = \frac{L}{\gamma S}} \tag{3.5}$$

résistivité $\tilde{\rho} = 1/\gamma$ (en Ω m) ; étude physique ;
— force de Lorentz sur une charge ponctuelle ; force de Laplace élementaire sur un petit tronçon de conducteur ; modèle classique de l'effet Hall ;

3.1.2 Formulation locale

— Absence de monopoles magnétiques :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B}(M) = 0} \tag{3.6}$$

Le lemme de Poincaré entraine l'existence d'un potentiel-vecteur (hors-programme) :

$$\vec{B}(M) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{A}(M) \tag{3.7}$$

Le potentiel-vecteur n'est pas défini de façon unique en raison de l'invariance de jauge :

$$\vec{A}'(M) = \vec{A}(M) + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f(M) \tag{3.8}$$

Pour effectuer des calculs explicites, il est souvent commode de réduire l'invariance de jauge en imposant une contrainte sur le potentiel-vecteur. En magnétostatique, la condition de « jauge de Coulomb » consiste à supposer que :

$$\operatorname{div} \vec{A}(M) = 0 \tag{3.9}$$

— équation de Maxwell-Ampère :

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B}(M) = \mu_0\, \vec{j}(M)} \tag{3.10}$$

Cette équation impose que le courant $\vec{j}(M)$ est à flux conservatif.
— (HP) relations de continuité à la traversée d'une « nappe de courant » de densité surfacique $\vec{j}_s(M)$ (si nécessaire, cette relation devra être fournie dans l'énoncé) :

$$\vec{B}_2(M) - \vec{B}_1(M) = \mu_0\, \vec{j}_s(M) \wedge \vec{n}_{1\to 2} \tag{3.11}$$

(continuité des composantes normales ; discontinuité finie des composantes tangentielles.)