

Programme de Colles

Quinzaine n°08

du lundi 27 janvier au vendredi 07 février 2025

1 Mécanique des fluides

1.1 Étude locale

1.1.1 Concepts généraux

- étude phénoménologique des fluides : notion de « libre parcours moyen » et de « milieu continu » ; notion de particule de fluide comme système fermé ; description lagrangienne et trajectoire ; description eulerienne par un champ de vitesse : $\vec{v}(\vec{r}, t)$ et ses lignes de courant ; ligne d'émission ; cas particulier du régime permanent (trajectoire = ligne de courant = ligne d'émission) ;
- masse volumique ρ ; « équation de continuité » = équation locale de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.1)$$

- débit massique D_m (en kg s^{-1}) à travers une surface (Σ) quelconque :

$$D_m = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{d\Sigma} = \iint_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{d\Sigma} \quad (1.2)$$

- débit volumique D_V (en $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$) à travers une surface (Σ) quelconque :

$$D_V = \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{d\Sigma} \quad (1.3)$$

- dérivée particulaire de la masse volumique ρ :

$$\frac{D\rho}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho \quad (1.4)$$

relation équivalente à (1.1) :

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (1.5)$$

interprétation physique de la divergence du champ de vitesse en terme du volume V d'une particule de fluide :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} \quad (1.6)$$

- écoulement incompressible¹ : $D\rho/Dt = 0$ pour une particule de fluide, soit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.7)$$

Pour cet écoulement, le champ de vitesse est à *flux conservatif* : pour un tube de courant, $D_V = \text{cte}$

- vorticité : $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$; vecteur tourbillon : $\vec{\Omega} = \vec{\omega}/2$; écoulement irrotationnel et potentiel des vitesses² :

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \Phi \quad (1.8)$$

1. Certains auteurs préfèrent l'expression *iso-volume*, car $V = \text{cte}$ pour une particule de fluide [1].

2. NB La « fonction courant » ψ est hors programme.

- cas particulier d'un écoulement potentiel incompressible : le potentiel des vitesses Φ est harmonique :

$$\Delta \Phi = 0 \tag{1.9}$$

- accélération d'une particule de fluide :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \tag{1.10}$$

- contrainte surfacique normale : pression P , équivalent volumique de la résultante des forces de pression sur une particule de fluide :

$$\vec{f}_{\text{pression}} = -\nabla P \tag{1.11}$$

- notion d'écoulement de Couette plan : contrainte surfacique tangentielle (cisaillement) et coefficient de viscosité dynamique η ; notion de « fluide newtonien »; équivalent volumique de la résultante des forces de viscosité sur une particule de fluide (admis) :

$$\vec{f}_{\text{viscosité}} = \eta \Delta \vec{v} \tag{1.12}$$

condition aux limites à l'interface d'un fluide visqueux et d'une paroi solide (impénétrable) :

$$\vec{v}_{\text{fluide}} = \vec{v}_{\text{paroi}} \tag{1.13}$$

- expérience de Reynolds (1883) : notion d'écoulement laminaire ou turbulent, introduction du nombre de Reynolds³ :

$$\text{Re} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\rho U L}{\eta} \tag{1.14}$$

où :

- L = longueur caractéristique de l'écoulement
- U = vitesse caractéristique de l'écoulement

- sphère solide dans un fluide en écoulement (uniforme et permanent en amont) : observation qualitative de la transition progressive « laminaire → turbulent » lorsque le nombre de Reynolds augmente;

- définition de la force de traînée F et du coefficient de traînée^a C_x :

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} C_x \rho S U^2 \tag{1.15}$$

où S = « maître-couple »;

- observation qualitative de la variation de C_x avec le nombre de Reynolds (extrait de : [2])

- évaluer un nombre de Reynolds pour choisir un modèle de traînée linéaire ou un modèle de traînée quadratique;

a. En anglais : C_D pour « drag ».

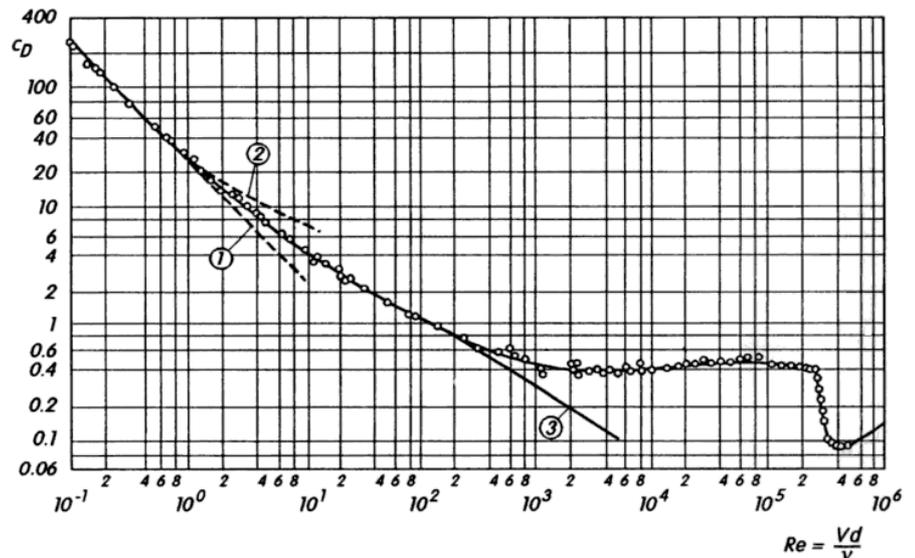


Fig. 1.19. Dependence of the drag coefficient of spheres on the Reynolds number
 Curve 1: theory, after G.G. Stokes (1856), $c_D = 24/\text{Re}$
 Curve 2: theory, after C.W. Oseen (1911), $c_D = 24/\text{Re}[1 + 3\text{Re}/16]$
 For the extension of this theory for higher Reynolds numbers, cf. M. Van Dyke (1964b)
 Curve 3: numerical results, after B. Fornberg (1988)
 Onset of unsteady flow at $\text{Re} = 200$, cf. U. Dallmann et al. (1993)

3. Notion de *similitude* = écoulements similaires : même forme, tailles différentes, et même $\text{Re} \rightarrow$ utilisation de modèles réduits.

— viscosité cinématique ν :

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\eta}{\rho} \quad (1.16)$$

— notion de « couche limite (Prandtl-1904) ;

1.1.2 Dynamique du fluide parfait

— notion de fluide parfait (sans viscosité) ; équation d'Euler dans un référentiel galiléen :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} P + \vec{f} \quad (1.17)$$

où \vec{f} désigne la densité volumique totale de forces extérieures (autres que les forces de pression) ; condition aux limites à l'interface d'un fluide parfait et d'une paroi solide (impénétrable) :

$$\vec{v}_{\text{fluide}} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{\text{paroi}} \cdot \vec{n} \quad (1.18)$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la paroi (aucune contrainte n'est imposée sur la composante tangentielle de la vitesse du fluide) ;

— équation de Bernoulli :

$$\frac{P}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = \text{cte} \quad (1.19)$$

et ses conditions d'applications (1 ou 2) :

1. écoulement parfait, incompressible, homogène, stationnaire et irrotationnel : la constante est la même en tout point du fluide ;
2. écoulement parfait, incompressible, stationnaire : l'équation (1.19) est valide *le long d'une ligne de courant* (la constante dépend en général de la ligne de courant) ;

— exemples : vidange d'un réservoir (formule de Torricelli) ; tube de Pitot ; tube de Venturi ;

1.1.3 Dynamique du fluide réel incompressible

— équation de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f} \quad (1.20)$$

où \vec{f} est la densité volumique totale de forces extérieures (autres que les forces de pression et viscosité).

— interprétation physique du nombre de Reynolds :

$$\text{Re} \sim \frac{\|\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} = \frac{\text{terme advectif}}{\text{terme de viscosité}} \quad (1.21)$$

— cas particulier d'un écoulement rampant : $\text{Re} \ll 1$;

⚠ LA TENSION SUPERFICIELLE NE FIGURE PLUS AU PROGRAMME DE PC.

1.1.4 (X-ENS) Dynamique du fluide réel compressible

⚠ LA DYNAMIQUE D'UN FLUIDE RÉEL COMPRESSIBLE NE FIGURE PAS AU PROGRAMME DE PC.

— équation de Navier-Stokes pour un écoulement compressible [3] :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{v}) + \vec{f} \quad (1.22)$$

où ξ désigne la *viscosité de volume* (ou deuxième viscosité), et \vec{f} est la densité volumique totale de forces extérieures (autres que les forces de pression et viscosité).

1.2 Ondes acoustiques

On considère un *fluide parfait*, et on néglige l'influence du champ de pesanteur. Dans un référentiel galiléen, le fluide parfait obéit à l'équation d'Euler :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = - \vec{\nabla} P \quad (1.23)$$

et à l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.24)$$

1.2.1 Approximation acoustique

- état de référence = fluide homogène : $(P_0, \rho_0) = \text{ctes}$, et au repos : $\vec{v}_0 = \vec{0}$;
- état « perturbé » du fluide (par rapport à son état de référence) :

$$P(\vec{r}, t) = P_0 + P_1(\vec{r}, t) \quad (1.25)$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t) \quad (1.26)$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_0 + \vec{v}_1(\vec{r}, t) = \vec{v}_1(\vec{r}, t) \quad (1.27)$$

La perturbation acoustique est supposée petite : $|P_1| \ll P_0$, et $|\rho_1| \ll \rho_0$ (la vitesse $\|\vec{v}_1\|$ est petite devant la vitesse du son : $\|\vec{v}_1\| \ll c$). Les trois termes (P_1, ρ_1, \vec{v}_1) sont considérés chacun comme des termes « du premier ordre » ; tout produit de deux de ses termes est considéré comme un terme du second ordre. En particulier, le terme advectif $(\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1$ est d'ordre deux.

- approximation acoustique : on ne conserve dans les équations que les termes *du premier ordre*. L'équation (1.23) se réduit à⁴ :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \vec{\nabla} P_1 \quad (1.28)$$

L'équation (1.24) se réduit à :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad (1.29)$$

- compressibilité isentropique du fluide parfait :

$$\chi_s = - \left. \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \right|_s = + \left. \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_s \quad (1.30)$$

On montre à partir de l'équation d'état $P = f(\rho)$ que :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \rho_0 \chi_s \frac{\partial P_1}{\partial t} \quad (1.31)$$

On en déduit l'équation d'onde :

$$\square P_1 = 0 \quad (1.32)$$

où la vitesse du son c s'écrit :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}} \quad (1.33)$$

- exemple du gaz parfait de masse molaire M :

$$c_{\text{GP}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} \quad (1.34)$$

4. Cette formule permet de montrer que la perturbation \vec{v}_1 dérive d'un potentiel des vitesses, donc que \vec{v}_1 est irrotationnel.

1.2.2 OPPH

- cas particulier d'une onde plane, progressive, harmonique (OPPH), dans la direction \vec{u} , de vecteur d'onde $\vec{k} = k \vec{u}$ (soit $\vec{u} \nearrow$ lorsque k est positif) :

$$P_1 = A \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] \quad (1.35)$$

L'équation (1.28) montre que l'onde acoustique est *longitudinale* : $\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}$, et que :

$$P_1 = \rho_0 c v_1 \quad (1.36)$$

« On définit l'impédance acoustique comme la rapport de la surpression sur la vitesse. Si un énoncé envisage une autre définition (par exemple en faisant intervenir la section d'un tuyau sonore), il doit le préciser. »

- impédance acoustique d'une OPPH dans la direction $\vec{u} \nearrow$:

$$Z_{\text{OPPH}(+)} = \frac{P_1}{v_1} = \rho_0 c \quad (1.37)$$

- par superposition d'OPPH dans la direction $\vec{u} \nearrow$, cette relation reste vraie pour une OPP selon $\vec{u} \nearrow$, d'où la définition de l'*impédance acoustique* d'une OPP (+) selon $\vec{u} \nearrow$:

$$Z_{\text{OPP}(+)} = \frac{P_1}{v_1} = \rho_0 c \quad (1.38)$$

L'impédance acoustique d'une OPP (-) selon $\vec{u} \searrow$ est :

$$Z_{\text{OPP}(-)} = -\rho_0 c = -Z_{\text{OPP}(+)} \quad (1.39)$$

1.2.3 Aspect énergétique

« On se borne à affirmer les expressions correspondantes sans démonstration. »

- densité de flux de puissance sonore (W m^{-2}) :

$$\vec{\pi} = P_1 \vec{v}_1 \quad (1.40)$$

- densité volumique d'énergie (J m^{-3}) :

$$e = \frac{1}{2} \rho_0 v_1^2 + \frac{1}{2} \chi_S P_1^2 \quad (1.41)$$

- conservation locale de l'énergie :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0 \quad (1.42)$$

- cas particulier d'une OPPH : intensité sonore I = puissance surfacique moyenne (W m^{-2}) :

$$I = \langle \pi \rangle_T \quad (1.43)$$

niveau (d'intensité) sonore en décibel ($L = \text{« level »}$) :

$$L = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (1.44)$$

où $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ est une intensité de référence⁵ (seuil d'audition moyen à 1 kHz).

5. Le seuil d'audition absolu est environ dix fois plus faible, et se situe vers 3.5 kHz.

1.2.4 Interface plane

On considère une interface plane (Σ) séparant deux fluides (A) et (B), d'impédances respectives $Z_A = \rho_A c_A$ et $Z_B = \rho_B c_B$.

Dans le fluide (A), une OPPH qui se propage dans le sens $A \rightarrow B$ tombe sous incidence normale sur (Σ). Il apparaît une OPPH réfléchie dans le fluide (A) et une OPPH transmise dans le fluide (B). Ces 3 OPPH ont la même pulsation ω .

- conditions aux limites sur l'interface (Σ) sans changement de section : continuité de la vitesse et de la pression;
- coefficient de réflexion en amplitude $r_{A \rightarrow B}$:

$$r_{A \rightarrow B} = \frac{Z_A - Z_B}{Z_A + Z_B} \quad (1.45)$$

- coefficient de transmission en amplitude $t_{A \rightarrow B}$:

$$t_{A \rightarrow B} = \frac{2 Z_A}{Z_A + Z_B} \quad (1.46)$$

- coefficient de réflexion en énergie R (symétrique $A \leftrightarrow B$) :

$$R = \left(\frac{Z_A - Z_B}{Z_A + Z_B} \right)^2 \quad (1.47)$$

- coefficient de transmission en énergie T (symétrique $A \leftrightarrow B$) :

$$T = \frac{4 Z_A Z_B}{(Z_A + Z_B)^2} \quad (1.48)$$

- conservation de la puissance :

$$R + T = 1 \quad (1.49)$$

1.3 Étude globale

Les bilans ne sont pas au programme de colle de cette quinzaine.

Références

- [1] Patrick Chassaing, *Mécanique des fluides – Éléments d'un premier parcours*, Cépaduès (3e édition-2010), ISBN 978-2-85428-929-9
- [2] Hermann Schlichting et Klaus Gersten, *Boundary Layer Theory*, Springer-Verlag (8e édition-2004), ISBN 81-8128-121-7.
- [3] Lev Landau et Evguéni Lifchitz, *Mécanique des fluides - Cours de Physique théorique (Vol. 6)*, Éditions MIR (2e édition-1989), ISBN 5-03-000644-3, p. 69