Programme de Colles

Quinzaine n°09

du lundi 24 février au vendredi 07 mars 2025

1 Mécanique des fluides

1.1 Bilans macroscopiques

— méthode générale pour un écoulement stationnaire, unidimensionnel, à une entrée (1) et une sortie (2) : associer un système fermé ($\mathscr{S}^\star$) à un système ouvert ($\mathscr{S}$) pour faire un bilan entre deux instants voisins t et $t+\mathrm{d}t$;

1.2 Bilans de masse

— débit massique D_m (en kg s^{-1}) à travers une surface (Σ) quelconque :

$$D_m = \iint_\Sigma \vec{j}\cdot\overrightarrow{d\Sigma} = \iint_\Sigma \rho\,\vec{v}\cdot\overrightarrow{d\Sigma} \tag{1.1}$$

— débit volumique D_V (en m^3 s^{-1}) à travers une surface (Σ) quelconque :

$$D_V = \iint_\Sigma \vec{v}\cdot\overrightarrow{d\Sigma} \tag{1.2}$$

— établir un bilan de masse en raisonnant sur un système ouvert et fixe, ou sur un système fermé et mobile ; utiliser un bilan de masse ;

1.3 Bilans dynamiques

— bilan de quantité de mouvement ; exemple en régime non-permanent : la fusée ;

— bilan d'énergie cinétique : exploiter la nullité (admise) de la puissance des forces intérieures dans un écoulement parfait et incompressible ;

⚠ les bilans de moment cinétique ne sont plus au programme de la filière PC.

1.4 Bilans thermodynamiques

La maîtrise des démonstrations par les étudiants et l'application des résultats à des situations concrètes constituent des objectifs de formation.

— bilan d'énergie interne : « premier principe industriel » pour un fluide en écoulement *permanent* quasi-unidimensionnel à la vitesse[1] v dans le champ de pesanteur g uniforme (l'axe Oz est choisi orienté vers le haut) pour les grandeurs *massiques* :

$$\Delta\left(h + \frac{v^2}{2} + g\,z\right) = w_i + q \tag{1.3}$$

w_i est la « travail indiqué » massique (ou travail « utile ») ;

— bilan d'entropie :

$$\Delta s = s_e + s_c \qquad \text{où :} \qquad s_e = \frac{q}{T_0} \tag{1.4}$$

où s_e est l'entropie échangée (massique), et s_c l'entropie crée (massique), qui vérifie : $s_c \geq 0$ avec :

1. ⚠ : ne pas confondre la vitesse v avec le volume massique !

— $s_c = 0$ lorsque la transformation est réversible ;

— $s_c > 0$ lorsque la transformation est irréversible ;

⚠ dans les équations (1.3) et (1.4), la notation Δf désigne la différence de la grandeur massique f entre la sortie (2) et l'entrée (1) : $\Delta f = f_2 - f_1$

— applications : étudier des machines thermiques réelles à l'aide du diagramme thermodynamique (T, s) et du diagramme des frigoristes (P, h)

Physique quantique

Description quantique d'une particule classique non-relativiste ($\|\vec{v}\| \ll c$) de masse m, soumise à une force conservative :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \tag{1.5}$$

2 Mécanique quantique

« *Toute discussion autour de la mesure et de ses effets sur un système est exclue, de même que toute introduction au spin.* »

2.1 Concepts généraux

— fonction d'onde complexe $\psi(\vec{r}, t)$; interprétation statistique de Born : $\rho = |\psi(\vec{r}, t)|^2$ est une *densité de probabilité de présence*, telle que la probabilité élémentaire dP de trouver la particule à l'instant t dans le volume $d\tau$ autour du point $\vec{r}$ est :

$$dP = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \; d\tau \tag{2.1}$$

condition de normalisation :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |\psi(\vec{r}, t)|^2 \; d\tau = 1 \tag{2.2}$$

— opérateur linéaire hamiltonien $\widehat{H}$; équation de Schrödinger (à fournir) :

$$\widehat{H}\,\psi \overset{\text{def}}{=} -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\psi + V\,\psi = i\,\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{2.3}$$

linéarité de l'équation de Schrödinger et théorème de superposition ;

— densité de courant de probabilité (cette expression générale est HP) :

$$\vec{j} = \frac{i\,\hbar}{2m}\left[\psi\;\vec{\nabla}\overline{\psi} - \overline{\psi}\;\vec{\nabla}\psi\right] = \frac{\hbar}{m}\,\text{Im}\left[\overline{\psi}\;\vec{\nabla}\psi\right] \tag{2.4}$$

$\vec{j}$ est solution de l'équation de conservation locale de la probabilité :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\,\vec{j} = 0 \tag{2.5}$$

— état stationnaire = état propre de l'énergie, solution de $\widehat{H}\psi = E\psi$ de la forme [2] :

$$\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r})\,\exp\left[-\frac{i\,E\,t}{\hbar}\right] \tag{2.6}$$

l'amplitude spatiale $\varphi(\vec{r})$ est solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\varphi + V\,\varphi = E\varphi \tag{2.7}$$

2. NB En physique classique des ondes, le programme de PC définit une onde stationnaire $\psi(\vec{r}, t)$ comme le produit de deux fonction *réelles* : $\psi(\vec{r}, t) = f(\vec{r})\,g(t)$, avec $f \in \mathbb{R}$ et $g \in \mathbb{R}$. L'onde stationnaire quantique est donc différente.

2.2 Rudiments sur le magnétisme

2.2.1 Notion de dipôle magnétique

— notion de moment magnétique $\vec{\mathfrak{m}}$; exemple d'un circuit filiforme plan :

$$\vec{\mathfrak{m}} = I\,\vec{S} \tag{2.8}$$

— champ magnétostatique crée à grande distance par le dipôle magnétique de moment dipolaire fixe : $\vec{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\,\vec{u}_z$, en coordonnées sphériques $M(r,\theta,\varphi)$:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0\,\mathfrak{m}}{4\pi\,r^3} \times \begin{cases} 2\cos\theta\;\vec{u}_r \\ \sin\theta\;\vec{u}_\theta \\ 0\;\vec{u}_\varphi \end{cases} \tag{2.9}$$

Analogie avec le champ électrostatique créé par un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{p} = p\,\vec{u}_z$;

— couple subi par un dipôle magnétique dans un champ magnétique uniforme (expression à fournir si nécessaire) :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathfrak{m}} \wedge \vec{B} \tag{2.10}$$

énergie potentielle (expression à fournir si nécessaire) :

$$E_p = -\,\vec{\mathfrak{m}} \cdot \vec{B} \tag{2.11}$$

analogies avec le dipôle électrique : $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$, et $E_p = -\,\vec{p} \cdot \vec{E}$;

— effet d'une faible inhomogénéité du champ magnétique : existence d'une résultante des forces extérieures non-nulle (expression à fournir si nécessaire) :

$$\vec{R}_{\text{ext}} = -\,\vec{\nabla}\,E_p = +\,\vec{\nabla}\left(\vec{\mathfrak{m}} \cdot \vec{B}\right) = \left(\vec{\mathfrak{m}} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B} \tag{2.12}$$

2.2.2 Rudiments sur le magnétisme atomique

— moment magnétique orbital : exemple du modèle planétaire classique de l'atome d'hydrogène à orbite circulaire ; rapport gyro-magnétique :

$$\gamma = \frac{q}{2\,m} \tag{2.13}$$

qui relie le moment magnétique orbital $\vec{\mathfrak{m}}_L$ au moment cinétique orbital $\vec{L}$:

$$\vec{\mathfrak{m}}_L = \gamma\,\vec{L} \tag{2.14}$$

opérateur vectoriel moment cinétique (lien avec la chimie) : nombres quantiques (ℓ, m_ℓ), où ℓ est un entier positif ($\ell \in \mathbb{N}$), et où m_ℓ est un entier tel que : $-\ell \leq m_\ell \leq +\ell$, soit $(2\ell+1)$ états de même ℓ ;

— notion d'opérateur vectoriel spin $\vec{S}$: nombres quantiques (s, m_s), où :

  — s est un entier positif et m_s un entier tel que : $-s \leq m_s \leq +s$, soit $(2s+1)$ états de même s ; terminologie : « boson » ;

  — s est un demi-entier positif et m_s un demi-entier tel que : $-s \leq m_s \leq +s$, soit $(2s+1)$ états de même s ; terminologie : « fermion » ; cas de l'électron :

$$s = \frac{1}{2} \qquad \text{et :} \qquad m_s = \pm\frac{1}{2} \quad (\text{ notés en chime : } \uparrow \text{ et } \downarrow) \tag{2.15}$$

— moment magnétique intrinsèque d'une particule ; facteur de Landé g (sans dimensions) qui relie le moment magnétique de spin $\vec{\mathfrak{m}}_S$ à l'opérateur vectoriel spin :

$$\vec{\mathfrak{m}}_S = g\,\gamma\,\vec{S} \tag{2.16}$$

— cas de l'électron [3] : $g_e \simeq 2$; magnéton de Bohr électronique :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2\,m_e} \tag{2.20}$$

construire en ordre de grandeur le magnéton de Bohr par analyse dimensionnelle ;

— évaluer l'ordre de grandeur maximal du moment magnétique volumique d'un aimant permanent ;

— expérience de Stern et Gerlach : décrire l'expérience et expliquer ses enjeux ;

---

3 Applications : problèmes unidimensionnels

On considère une dynamique selon un axe cartésien Ox, décrite par une fonction d'onde $\psi(x,t)$ normalisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\psi(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x = 1 \tag{3.1}$$

3.1 Position et impulsion : inégalité de Heisenberg

3.1.1 Position

— opérateur linéaire position :

$$\widehat{x}\,\psi(x,t) = x\,\psi(x,t) \tag{3.2}$$

— moments d'ordre un et deux de l'opérateur position :

$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left|\psi(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x \tag{3.3}$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \left|\psi(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x \tag{3.4}$$

dispersion en position = écart quadratique moyen :

$$\Delta x \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2} \tag{3.5}$$

3.1.2 Quantité de mouvement

— opérateur linéaire quantité de mouvement (= impulsion) :

$$\widehat{p}\,\psi(x,t) = -\,i\hbar\,\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \tag{3.6}$$

satisfaisant à la « relation de commutation canonique » de Born-Heisenberg-Jordan :

$$\left[\,\hat{x},\ \hat{p}\,\right] = i\hbar\,\mathbb{1} \tag{3.7}$$

où $\mathbb{1}$ désigne l'opérateur identité.

---

3. Existence d'un moment magnétique « anormal » de l'électron (expérience de Kusch et Foley - 1947) :

$$g_e = 2\,(1 + a_e) \tag{2.17}$$

Expression de Schwinger (1948) de l'anomalie a_e :

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} + O(\alpha^2) \tag{2.18}$$

où α est la « constante de structure fine » de Sommerfeld :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \tag{2.19}$$

— moments d'ordre un et deux de l'opérateur quantité de mouvement :

$$\langle \hat{p} \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x,t)} \, \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \, \mathrm{d}x \tag{3.8}$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x,t)} \, \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \, \mathrm{d}x = +\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right|^2 \mathrm{d}x \tag{3.9}$$

dispersion en impulsion = écart quadratique moyen :

$$\Delta p \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2} \tag{3.10}$$

3.1.3 Inégalité de Heisenberg

— inégalité de Heisenberg :

$$\Delta x \times \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{3.11}$$

application : énergie minimale dans un puits ; « confinement quantique » ;

3.2 Particule libre

énergie potentielle $V(x) = V_0 = \text{cte}$; pour simplifier, on prend $V_0 = 0$.

— amplitudes spatiales des ondes planes de de Broglie :

$$\varphi(x) = A \exp\left[i \frac{p\,x}{\hbar} \right] + B \exp\left[-i \frac{p\,x}{\hbar} \right] \tag{3.12}$$

caractère non-normalisable sur $\mathbb{R}$, et nécessité de former un paquet d'onde ;

— interprétation physique des ondes planes de de Broglie comme OPPH, en posant : $p = \hbar k$ et : $E = \hbar\omega$:

$$\psi_+(x,t) = A \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(p\,x - E\,t \right) \right] = A \exp\left[i\,(k\,x - \omega\,t) \right] \tag{3.13}$$

et :

$$\psi_-(x,t) = B \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \left(p\,x + E\,t \right) \right] = B \exp\left[-i\,(k\,x + \omega\,t) \right] \tag{3.14}$$

— relation de dispersion :

$$E = \frac{p^2}{2\,m} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{\hbar\,k^2}{2\,m} \tag{3.15}$$

— vitesse de phase : $v_\varphi = E/p = \omega/k$; paquet d'onde ; vitesse de groupe comme vitesse de la « particule » :

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = \frac{\hbar\,k}{m} = \frac{d\omega}{dk} \tag{3.16}$$

— paquet d'onde gaussien : « étalement » du paquet d'onde et temps d'Ehrenfest ;

— densité de courant de probabilité associée à l'OPPH ψ_+ :

$$\vec{j}_+ = |A|^2 \times \frac{\hbar\,\vec{k}_+}{m} = +\,|A|^2 \times \frac{\hbar\,k}{m}\,\vec{u}_x \tag{3.17}$$

interprétation : $\vec{j}$ = densité × $\overrightarrow{\text{vitesse}}$;

— densité de courant de probabilité associée à l'OPPH ψ_- :

$$\vec{j}_- = |B|^2 \times \frac{\hbar\,\vec{k}_-}{m} = -\,|B|^2 \times \frac{\hbar\,k}{m}\,\vec{u}_x \tag{3.18}$$

3.3 Marche de potentiel de hauteur V_0 finie en x_0

énergie potentielle :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque : } x < x_0 \\ +V_0 & \text{lorsque : } x > x_0 \end{cases} \tag{3.19}$$

On sépare la droite réelle en deux domaines :

domaine (I)	domaine (II)
$x < x_0$	$x > x_0$

3.3.1 Conditions aux limites (CL)

— continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première, soit :

$$\boxed{\varphi(x_0^-) = \varphi(x_0^+) \qquad \text{et :} \qquad \varphi'(x_0^-) = \varphi'(x_0^+)} \tag{3.20}$$

3.3.2 États de diffusion lorsque $0 < E < V_0$

— onde plane incidente en provenance de $x = -\infty$; existence d'une onde réfléchie et d'une onde évanescente ; choix $x_0 = 0$ pour simplifier ; paramétrage de la fonction d'onde $\varphi(x)$ dans les deux domaines de l'espace :

$$\varphi_I(x) = A \exp(i\,k\,x) + B \exp(-\,i\,k\,x) \tag{3.21}$$

$$\varphi_{II}(x) = C \exp(-\kappa\,x) \tag{3.22}$$

où A, B et C sont trois constantes complexes, et k et κ les grandeurs réelles positives :

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{2\,m\,E}}{\hbar} \tag{3.23}$$

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{2\,m\,(V_0 - E)}}{\hbar} \tag{3.24}$$

— solution des équations de CL de type (3.20) :

$$B = -\left(\frac{\kappa + i\,k}{\kappa - i\,k}\right) A \tag{3.25}$$

$$C = -\left(\frac{2\,i\,k}{\kappa - i\,k}\right) A \tag{3.26}$$

— coefficient de réflexion en probabilité :

$$\boxed{R = \frac{|j_r|}{j_i} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = 1} \tag{3.27}$$

3.3.3 États de diffusion lorsque $E > V_0 > 0$

— onde plane incidente en provenance de $x = -\infty$; existence d'une onde réfléchie et d'une onde transmise ; choix $x_0 = 0$ pour simplifier ; paramétrage de la fonction d'onde $\varphi(x)$ dans les deux domaines de l'espace :

$$\varphi_I(x) = A \exp(i\,k\,x) + B \exp(-\,i\,k\,x) \tag{3.28}$$

$$\varphi_{II}(x) = C \exp\left(i\,k'\,x\right) \tag{3.29}$$

où A, B et C sont trois constantes complexes, et k et k' les grandeurs réelles positives :

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{2\,m\,E}}{\hbar} \tag{3.30}$$

$$k' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{2\,m\,(E - V_0)}}{\hbar} \tag{3.31}$$

— solution des équations de CL de type (3.20) :

$$B = \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right) A \tag{3.32}$$

$$C = \left(\frac{2\,k}{k+k'}\right) A \tag{3.33}$$

— coefficient de réflexion en probabilité :

$$R = \frac{|j_\mathrm{r}|}{j_\mathrm{i}} = \frac{|B|^2}{|A|^2} \tag{3.34}$$

coefficient de transmission en probabilité :

$$T = \frac{j_\mathrm{t}}{j_\mathrm{i}} = \frac{k'\,|C|^2}{k\,|A|^2} \tag{3.35}$$

conservation :

$$R + T = 1 \tag{3.36}$$

3.4 Marche de potentiel de hauteur infinie en x_0

énergie potentielle :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque : } x < x_0 \\ +\infty & \text{lorsque : } x > x_0 \end{cases} \tag{3.37}$$

3.4.1 Condition aux limites (CL)

— continuité de la fonction d'onde, avec annulation :

$$\varphi(x_0^-) = \varphi(x_0^+) = 0 \tag{3.38}$$

⚠ La dérivée première est discontinue en $x = x_0$!

3.5 Puits de potentiel rectangulaire de profondeur infinie

Puits rectangulaire de largeur a et de profondeur infinie ; énergie potentielle $V(x)$:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque : } 0 < x < a \\ +\infty & \text{lorsque : } x < 0 \quad \text{ou : } x > a \end{cases} \tag{3.39}$$

— paramétrage de la fonction d'onde spatiale ; utilisation des conditions aux limites de type (3.38) ; états propres normalisés ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{a}\right) \tag{3.40}$$

les fonctions $\varphi_n(x)$ sont orthonormales pour le produit scalaire :

$$\langle \varphi_m | \varphi_n \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}_m(x)\,\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{n,m} \tag{3.41}$$

où $\delta_{n,m}$ est le symbole de Kronecker :

$$\delta_{n,m} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si : } n = m \\ 0 & \text{si : } n \neq m \end{cases} \tag{3.42}$$

— énergies propres :

$$E_n = \frac{n^2\,\pi^2\,\hbar^2}{2\,m\,a^2} \tag{3.43}$$

interprétation du fondamental à l'aide de l'inégalité de Heisenberg ; effet du confinement ;

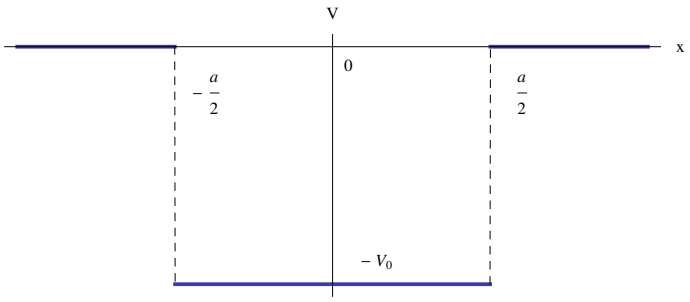
3.6 Puits rectangulaire de profondeur finie

On considère une énergie potentielle $V(x)$ en forme de puits rectangulaire de largeur a et de profondeur finie ($V_0 > 0$).

On s'intéresse aux états liés d'énergie E, avec : $-V_0 < E < 0$. On introduit les grandeurs k et κ réelles positives :

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{2m(V_0+E)}}{\hbar} \tag{3.44}$$

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \tag{3.45}$$



— exploitation de la symétrie ; existence d'états propres symétriques (S) et anti-symétriques (A) ; pour chaque parité, paramétrage de l'amplitude spatiale $\varphi(x)$ dans les trois domaines ;

— utilisation des conditions aux limites de type (3.20) ;

— discussion graphique pour trouver les énergies propres quantifiées ;

— élargissement effectif du puits par les ondes évanescentes : interpréter *qualitativement*, à partir de l'inégalité de Heisenberg spatiale, l'abaissement des niveaux d'énergie par rapport au puits de profondeur infinie ;