

Inégalité de Heisenberg

« ...il nous faut être très prudent quant à la phraséologie d'une déclaration quelconque concernant le comportement des particules atomiques. »

Werner Heisenberg [1]

On propose ici une démonstration mathématique de l'inégalité de Heisenberg¹.

1 Démonstration

La démonstration proposée ci-dessous nécessite seulement de savoir ce qu'est précisément la quantité de mouvement en mécanique ondulatoire; la transformation de Fourier² n'y apparaît pas explicitement.

1.1 Opérateur impulsion

En mécanique quantique, les « observables » physiques sont représentées par des « opérateurs » qui forment une *algèbre non-commutative*. Ceci signifie que le produit de deux opérateurs est lui-même un autre opérateur, qui dépend en général de l'ordre dans lequel le produit a été effectué.

Par exemple, pour une particule non-relativiste à une dimension d'espace, l'opérateur position \hat{x} et l'opérateur impulsion \hat{p} vérifient la relation de commutation canonique de Born, Heisenberg, Jordan (1925) :

$$[\hat{x}, \hat{p}] \stackrel{\text{def}}{=} \hat{x} \hat{p} - \hat{p} \hat{x} = i \hbar \hat{1} \quad (1.1)$$

où $\hat{1}$ est l'opérateur identité. Cette relation de commutation canonique de Born, Heisenberg, Jordan peut être prise comme l'un des postulats de la mécanique quantique.

Dans le cadre de la mécanique ondulatoire du programme de PC, on vérifie aisément que les représentations suivantes conviennent :

$$\hat{x} \psi(x, t) = x \psi(x, t) \quad (1.2)$$

$$\hat{p} \psi(x, t) = -i \hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \quad (1.3)$$

Exercice : calculer successivement : $\hat{x} \hat{p} \psi(x, t)$, puis : $\hat{p} \hat{x} \psi(x, t)$. En déduire que : $[\hat{x}, \hat{p}] \psi(x, t) = i \hbar \psi(x, t)$.

1. Sur la dénomination « principe d'incertitude », lire e.g. [2].

2. Rappelons que la transformation de Fourier est hors programme en CPGE, et que même les simples « séries de Fourier » ont totalement disparues de nouveaux programmes de mathématiques (y compris dans la filière MP).

1.2 Démonstration de l'inégalité de Heisenberg

Pour démontrer l'inégalité de Heisenberg, on considère que ces deux opérateurs sont centrés, i.e. de moyenne nulle³ :

$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x,t)} [\hat{x} \psi(x,t)] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi(x,t)|^2 dx = 0 \quad (1.4)$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x,t)} [\hat{p} \psi(x,t)] dx = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x,t)} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} dx = 0 \quad (1.5)$$

On introduit alors une intégrale dépendant d'un paramètre réel λ :

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x \psi + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 dx \quad (1.6)$$

On développe l'intégrande, puis on effectue quelques intégrations par parties (en se souvenant que la fonction d'onde et ses dérivées doivent s'annuler à l'infini pour pouvoir normaliser la densité de probabilité de présence). On obtient finalement un polynôme du second degré en λ qui contient les deux valeurs quadratiques moyennes :

$$I(\lambda) = \langle \hat{x}^2 \rangle - \lambda + \frac{\lambda^2}{\hbar^2} \langle \hat{p}^2 \rangle \quad (1.7)$$

Exercice : développer l'intégrande et effectuer les intégrations par parties qui permettent de passer de la définition (1.6) à l'expression (1.7).

Or l'intégrande étant toujours positif, l'intégrale l'est aussi : $I(\lambda) \geq 0$. Le polynôme ne peut donc avoir de racines réelles distinctes, ce qui impose que son discriminant vérifie : $\Delta \leq 0$. On calcule facilement :

$$\Delta = 1 - \frac{4}{\hbar^2} \langle \hat{x}^2 \rangle \langle \hat{p}^2 \rangle \quad (1.8)$$

d'où :

$$\langle \hat{x}^2 \rangle \langle \hat{p}^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \quad (1.9)$$

Comme les opérateurs sont centrés, on a pour les variances :

$$(\Delta x)^2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle \quad (1.10)$$

$$(\Delta p)^2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle \quad (1.11)$$

On obtient finalement l'inégalité de Heisenberg pour les écarts-types :

$$\Delta x \times \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.12)$$

Saturation de l'inégalité de Heisenberg

La « saturation » de l'inégalité de Heisenberg correspond au cas où l'inégalité (1.12) atteint sa borne inférieure et se réduit à une *égalité*. Ceci correspond au cas où : $I(\lambda) = 0$, ce qui se produit lorsque la fonction d'onde $\psi(x, t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x \psi + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (1.13)$$

Exercice : pour un état stationnaire : $\psi(x, t) = \varphi(x) g(t)$, montrer que l'amplitude spatiale $\varphi(x)$ est une *gaussienne*, pour laquelle on exprimera le paramètre λ en fonction de la dispersion Δx .

3. On peut toujours se ramener à ce cas au moyen d'une translation où l'on soustrait la valeur moyenne si elle est non-nulle; on vérifie facilement que les opérateurs centrés vérifient la même relation de commutation canonique que les originaux.

2 Compléments (hors programme)

2.1 Introduction de la transformation de Fourier spatiale

2.1.1 Définition de la transformation de Fourier spatiale

Notons $\phi(p, t)$ la transformée de Fourier de la fonction d'onde $\psi(x, t)$ par rapport à l'espace :

$$\phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) \exp\left[-\frac{ipx}{\hbar}\right] dx \quad (2.1)$$

La relation inverse s'écrit :

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(p, t) \exp\left[+\frac{ipx}{\hbar}\right] dp \quad (2.2)$$

La normalisation de $\psi(x, t)$ entraîne⁴ celle de $\phi(p, t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(p, t)|^2 dp = 1 \quad (2.3)$$

Ainsi, $|\phi(p, t)|^2$ peut être considérée comme une *densité de probabilité* pour l'impulsion : la quantité $|\phi(p, t)|^2 dp$ représente la probabilité élémentaire de trouver la valeur de l'impulsion dans l'intervalle $[p, p + dp]$ à l'instant t . On peut l'utiliser pour calculer les premiers moments de la distribution de l'opérateur quantité de mouvement :

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p |\phi(p, t)|^2 dp \quad (2.4)$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 |\phi(p, t)|^2 dp \quad (2.5)$$

2.1.2 Opérateurs position et impulsion

Lorsque l'état quantique du système est précisé par la fonction $\phi(p, t)$, définissons l'opérateur position \hat{x} et l'opérateur impulsion \hat{p} par les nouvelles représentations suivantes :

$$\hat{p}\phi(p, t) = p\phi(p, t) \quad (2.6)$$

$$\hat{x}\phi(p, t) = +i\hbar \frac{\partial\phi(p, t)}{\partial p} \quad (2.7)$$

Ces nouveaux opérateurs vérifient également la relation de commutation canonique de Born, Heisenberg, Jordan (1925) :

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \hat{1} \quad (2.8)$$

Exercice : calculer : $\hat{x}\hat{p}\phi(p, t)$, puis : $\hat{p}\hat{x}\phi(p, t)$. En déduire que : $[\hat{x}, \hat{p}]\phi(p, t) = i\hbar\phi(p, t)$.

Le calcul des deux premiers moments de l'opérateur position \hat{x} s'effectue à l'aide des formules suivantes :

$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\phi(p, t)} [\hat{x}\phi(p, t)] dp = +i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\phi(p, t)} \frac{\partial\phi(p, t)}{\partial p} dp \quad (2.9a)$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\phi(p, t)} [\hat{x}^2\phi(p, t)] dp = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\phi(p, t)} \frac{\partial^2\phi(p, t)}{\partial p^2} dp \quad (2.9b)$$

4. En mathématiques, c'est la *théorème de Plancherel-Parseval*.

2.2 Forme générale de l'inégalité de Heisenberg

2.2.1 Inégalité de Robertson (1929)

Soient \hat{A} et \hat{B} deux opérateurs hermitiens⁵. Leur commutateur est en général non-nul; on montre qu'il peut alors s'écrire :

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C} \quad (2.10)$$

où \hat{C} est un troisième opérateur hermitien. Par exemple, la relation de commutation canonique (2.8) de Heisenberg, Born, Jordan correspond au cas particulier où : $\hat{C} = \hbar\hat{1}$.

Soient alors Δa et Δb les écarts-types des opérateurs \hat{A} et \hat{B} dans l'état quantique $\psi(x, t)$. On montre l'inégalité de Robertson⁶ [3] :

$$\Delta a \times \Delta b \geq \frac{1}{2} \langle \hat{C} \rangle \quad (2.11)$$

où la moyenne est calculée pour le même l'état quantique $\psi(x, t)$:

$$\langle \hat{C} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x, t)} [\hat{C}\psi(x, t)] dx \quad (2.12)$$

L'inégalité (1.12) précédente correspond au cas particulier où : $\hat{C} = \hbar\hat{1}$, avec : $\langle \hat{1} \rangle = 1$ quel que soit l'état quantique ψ .

Commentaires

Il est essentiel de voir que la borne inférieure de l'inégalité de Robertson dépend en général de l'état quantique pour lequel est calculée la moyenne du commutateur.

Considérons par exemple l'opérateur vectoriel « moment cinétique⁷ », dont les composantes cartésiennes sont :

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left[y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right] \quad (2.13a)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left[z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right] \quad (2.13b)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left[x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right] \quad (2.13c)$$

On montre les relations de commutations suivantes⁸ :

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z \quad (2.14a)$$

$$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x \quad (2.14b)$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y \quad (2.14c)$$

On considère l'opérateur \hat{L}^2 défini par la somme des carrés des trois opérateurs composantes :

$$\hat{L}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \quad (2.15)$$

On montre que les deux opérateurs \hat{L}^2 et \hat{L}_z commutent : il est alors possible de trouver des états propres communs à ces deux opérateurs.

Pour cela, il est commode d'introduire un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'origine O . On appelle « harmoniques sphériques » $Y_{\ell, m}(\theta, \varphi)$ les états propres communs des deux opérateurs \hat{L}^2 et \hat{L}_z :

$$\hat{L}_z Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) = m\hbar Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) \quad (2.16a)$$

$$\hat{L}^2 Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) = \ell(\ell+1)\hbar^2 Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) \quad (2.16b)$$

ℓ désigne un entier positif : $\ell \in \mathbb{N}$, et m un autre entier compris entre $-\ell$ et $+\ell$. Ainsi, pour un entier ℓ fixé, le nombre entier m peut prendre $(2\ell+1)$ valeurs distinctes.

5. On a : $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ et : $\hat{B}^\dagger = \hat{B}$. Un opérateur hermitien possède toujours des valeurs propres réelles, c'est la raison pour laquelle les « observables » physiques sont usuellement représentées par ce type d'opérateur. Pour une définition mathématique précise de l'hermiticité et de la notation \hat{A}^\dagger , cf. e.g. le TD X-ENS sur le hamiltonien disponible sur : www.laphyth.org

6. Howard Percy Robertson (1903-1961), mathématicien et cosmologiste américain.

7. Sur l'opérateur moment cinétique, cf. le TD X-ENS disponible sur www.laphyth.org

8. Born, Heisenberg et Jordan - 16 novembre 1925.

Comme état quantique normalisé dans \mathbb{R}^3 , Condon⁹ adopte l'expression suivante [4] :

$$\psi(r, \theta, \varphi) = f(r) \times Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) \quad (2.17)$$

où $f(r)$ est une fonction purement radiale (dont l'expression n'a pas besoin d'être précisée ici). Il est alors possible de montrer que : $\langle \hat{L}_x \rangle = 0$, et : $\langle \hat{L}_y \rangle = 0$

Par ailleurs, les écarts-types ont pour expressions [3] :

$$\Delta L_x = \Delta L_y = \sqrt{\frac{1}{2} [\ell(\ell+1) - m^2]} \hbar \quad (2.18a)$$

$$\Delta L_z = 0 \quad (2.18b)$$

On observe par exemple que le commutateur (2.14a) n'est jamais nul. En revanche :

- dans l'état quantique ($\ell = 0, m = 0$), tous les écarts-types sont nuls. On a : $\langle \hat{L}_z \rangle = 0$.
- dans un état quantique ($\ell \neq 0, m = 0$), on a :

$$\Delta L_x = \Delta L_y = \sqrt{\frac{1}{2} \ell(\ell+1)} \hbar \quad \implies \quad \Delta L_x \times \Delta L_y = \frac{1}{2} \ell(\ell+1) \hbar^2 \quad (2.19)$$

Or, on a toujours : $\langle \hat{L}_z \rangle = 0$, donc la valeur moyenne du commutateur (2.14a) est nulle, et la borne inférieure de Robertson est identiquement nulle!

2.2.2 Inégalité de Schrödinger (1930)

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient \vec{a} et \vec{b} deux vecteurs ordinaires (réels). On sait que leur produit scalaire peut s'écrire :

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta \quad (2.20)$$

où θ est l'angle formé entre les deux vecteurs. Comme : $\cos \theta \leq 1$, on a l'inégalité :

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \quad (2.21)$$

Ce résultat peut être généralisé pour des vecteurs complexes (notés sans flèches) sous la forme :

$$|\langle \chi | \varphi \rangle|^2 \leq \|\varphi\|^2 \|\chi\|^2 \quad (2.22)$$

Inégalité de Schrödinger (1930)

Soient \hat{A} et \hat{B} deux opérateurs hermitiens ($\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ et $\hat{B}^\dagger = \hat{B}$) supposés provisoirement centrés, et soit $|\psi\rangle$ un vecteur d'état quantique donné. On considère les deux vecteurs d'états suivants :

$$|\varphi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A} |\psi\rangle \quad \text{et} \quad |\chi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \hat{B} |\psi\rangle \quad (2.23)$$

auxquels on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz (2.22). Pour cela, on calcule :

$$\|\varphi\|^2 = \langle \varphi | \varphi \rangle = \left(\langle \psi | \hat{A}^\dagger \right) \left(\hat{A} |\psi\rangle \right) \stackrel{\hat{A}^\dagger = \hat{A}}{=} \langle \psi | \hat{A}^2 |\psi\rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle \quad (2.24a)$$

$$\|\chi\|^2 = \langle \chi | \chi \rangle = \left(\langle \psi | \hat{B}^\dagger \right) \left(\hat{B} |\psi\rangle \right) \stackrel{\hat{B}^\dagger = \hat{B}}{=} \langle \psi | \hat{B}^2 |\psi\rangle = \langle \hat{B}^2 \rangle \quad (2.24b)$$

$$\langle \chi | \varphi \rangle = \left(\langle \psi | \hat{B}^\dagger \right) \left(\hat{A} |\psi\rangle \right) = \langle \psi | \hat{B} \hat{A} |\psi\rangle = \langle \hat{B} \hat{A} \rangle \quad (2.24c)$$

Sachant que : $|\underline{z}|^2 = \overline{\underline{z}} \underline{z}$, on peut écrire :

$$|\langle \hat{A} \hat{B} \rangle|^2 = \overline{\langle \hat{A} \hat{B} \rangle} \times \langle \hat{A} \hat{B} \rangle = \langle \hat{B} \hat{A} \rangle \times \langle \hat{A} \hat{B} \rangle \quad (2.25)$$

9. Edward Condon (1902-1974), physicien américain.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz (2.22) peut donc se réécrire :

$$\langle \hat{A}^2 \rangle \times \langle \hat{B}^2 \rangle \geq |\langle \hat{A} \hat{B} \rangle|^2 \quad (2.26)$$

Schrödinger remarque que l'on peut toujours écrire un produit comme la somme d'un terme symétrique et d'un terme anti-symétrique :

$$\hat{A} \hat{B} = \frac{1}{2} (\hat{A} \hat{B} + \hat{B} \hat{A}) + \frac{1}{2} (\hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A}) \quad (2.27)$$

La dernière parenthèse fait apparaître le commutateur des deux opérateurs. La première parenthèse est appelée *anti-commutateur*, et traditionnellement notée à l'aide d'accolades¹⁰ :

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A} \hat{B} + \hat{B} \hat{A} \quad (2.28)$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\hat{A} \hat{B} = \frac{1}{2} \{\hat{A}, \hat{B}\} + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}] \quad (2.29)$$

Par linéarité de la moyenne, on obtient :

$$\langle \hat{A} \hat{B} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \{\hat{A}, \hat{B}\} + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}] \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle + \frac{1}{2} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \quad (2.30)$$

En inversant \hat{A} et \hat{B} , on obtient :

$$\langle \hat{B} \hat{A} \rangle = \frac{1}{2} \langle \{\hat{B}, \hat{A}\} \rangle + \frac{1}{2} \langle [\hat{B}, \hat{A}] \rangle \quad (2.31)$$

Or, l'anti-commutateur est symétrique et le commutateur est anti-symétrique; on peut donc écrire :

$$\langle \hat{B} \hat{A} \rangle = \frac{1}{2} \langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle - \frac{1}{2} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \quad (2.32)$$

Des expression (2.30) et (2.32), on déduit que leur produit s'écrit :

$$|\langle \hat{A} \hat{B} \rangle|^2 = \frac{1}{4} \langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle^2 - \frac{1}{4} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle^2 \quad (2.33)$$

En utilisant finalement (2.10) pour le commutateur, on obtient l'inégalité de Schrödinger :

$$\langle \hat{A}^2 \rangle \times \langle \hat{B}^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle^2 + \frac{1}{4} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^2 \quad (2.34)$$

Lorsque les opérateurs \hat{A} et \hat{B} ne sont pas centrés, il suffit d'introduire les opérateurs centrés \tilde{A} et \tilde{B} définis par :

$$\tilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \quad (2.35a)$$

$$\tilde{B} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle \quad (2.35b)$$

Un calcul sans difficulté montre que le commutateur est invariant, alors que l'anti-commutateur devient :

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = [\hat{A}, \hat{B}] \quad (2.36a)$$

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}\} = \{\hat{A}, \hat{B}\} - 2 [\hat{A} \langle \hat{B} \rangle + \hat{B} \langle \hat{A} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle] \quad (2.36b)$$

La valeur moyenne de l'anti-commutateur vaut donc :

$$\langle \{\tilde{A}, \tilde{B}\} \rangle = \langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle - 2 \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle \quad (2.37)$$

On obtient l'expression générale de l'inégalité de Schrödinger pour les variances [5, 6] :

$$\boxed{(\Delta a)^2 \times (\Delta b)^2 \geq \left(\frac{1}{2} \langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle \right)^2 + \frac{1}{4} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^2} \quad (2.38)$$

Commentaires

La borne inférieure de l'inégalité de Schrödinger est *toujours supérieure ou égale* à celle obtenue par Robertson. L'inégalité de Schrödinger (2.38) se réduit à celle de Robertson (2.11) lorsque la parenthèse de (2.38) est nulle, soit :

$$\langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle = 2 \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle \quad (2.39)$$

10. Lorsque les opérateurs \hat{A} et \hat{B} sont hermitiens, leur anti-commutateur est lui-aussi un opérateur hermitien.

2.3 La relation temps-énergie

2.3.1 Introduction

On trouve dans la littérature une « relation temps-énergie » écrite sous la forme :

$$\Delta E \times \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.40)$$

Le statut précis de cette relation n'est pas élémentaire. En effet, si l'énergie du système physique considéré est bien caractérisée par l'opérateur hamiltonien, dont il est possible de définir proprement la dispersion statistique ΔE dans un état quantique $\psi(x, t)$ donné, *il n'existe pas d'opérateur temps en physique quantique*¹¹, de telle sorte qu'il faut beaucoup de soin pour préciser le sens de la durée Δt (cf. le paragraphe 2.3.2).

Prenant le cas d'un système isolé (dont l'énergie est conservée), Landau aimait faire la remarque suivante : « Il n'y a pas de limitation! Je peux mesurer l'énergie et regarder ma montre; je connais alors à la fois l'énergie et le temps. » [10].

État propre de l'énergie

Soit $\psi_n(x)$ un état propre de l'énergie :

$$\hat{H} \psi_n(x) = E_n \psi_n(x) \quad (2.41)$$

Dans cet état quantique, on a :

$$\langle \hat{H} \rangle = E_n \quad (2.42)$$

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = E_n^2 \quad (2.43)$$

de telle sorte que la dispersion en énergie est nulle : $\Delta E = 0$. Rappelons que l'évolution temporelle d'un état stationnaire est de la forme :

$$\psi_n(x, t) = \psi_n(x) \exp \left[- \frac{i E t}{\hbar} \right] \quad (2.44)$$

Ainsi, la densité de probabilité de présence ne dépend pas du temps :

$$|\psi_n(x, t)|^2 = |\psi_n(x)|^2 \quad (2.45)$$

11. Plus précisément, il n'existe pas d'opérateur temps canoniquement conjugué au hamiltonien, i.e. un opérateur \hat{T} qui obéirait à la relation de commutation canonique : $[\hat{H}, \hat{T}] = i \hbar \hat{1}$, relation quantique « naturelle » eu égard à la relation similaire qui existe en mécanique classique (dans le formalisme hamiltonien, le commutateur est remplacé par le crochet de Poisson). Ce résultat est connu sous le nom de « théorème de Pauli » (1933) : « *any attempt of introducing time as an operator in quantum mechanics must be fundamentally abandoned, and that the time t in quantum mechanics has to be regarded as an ordinary number* »; cf. [7] p. 63. Pour une analyse critique du théorème de Pauli, cf. e.g. [8, 9].

Utilisation en physique des particules

Dans un article publié en 1972 en hommage à Dirac [11], Eugene Wigner écrit que la relation (2.40) est usuellement appliquée dans un cas bien précis, pour relier la *durée de vie* finie d'une « résonance ¹² » à sa *largeur* finie en énergie.

Illustrons cette utilisation avec le boson-vecteur Z_0 , médiateur de l'interaction nucléaire faible. On montre ci-dessous quelques données expérimentales fournies par ATLAS ¹³ correspondant à la formation, puis la désintégration d'un boson Z_0 en une paire de lepton/anti-lepton (électron ou muon).

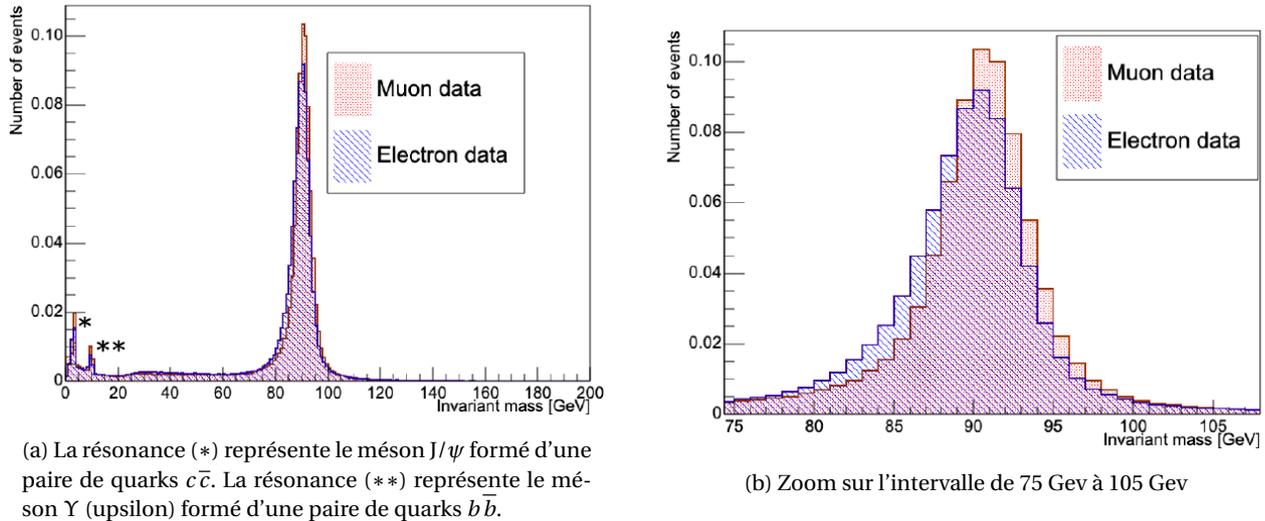


FIGURE 2.1 – Spectre de masse. En abscisse, énergie de masse au repos ($E = M c^2$), appelée « masse invariante ». En ordonnée, les histogrammes du nombre d'évènement mesurés sont normalisés pour que l'aire sous la courbe soit égale à l'unité. En rouge : canal de désintégration $Z_0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$. En bleu : canal de désintégration $Z_0 \rightarrow e^+ + e^-$ (figures extraites de [12])

La meilleure analyse des données expérimentales disponibles en 2018 conduit aux estimations suivantes ¹⁴ [13] :

$$E = M c^2 \approx 91\,187.6 \pm 2.1 \text{ MeV} \quad (2.46a)$$

$$\Gamma = \Delta E \approx 2\,495.2 \pm 2.3 \text{ MeV} \quad (2.46b)$$

On en déduit la durée de vie moyenne du boson-vecteur Z_0 :

$$\tau \sim \frac{\hbar}{\Gamma} \sim 2.5 \cdot 10^{-25} \text{ s} \quad (2.47)$$

12. En physique des particules, une résonance est la trace expérimentale d'une particule instable de très courte durée de vie.

13. ATLAS est le nom de l'un des quatre détecteurs du LHC (Large Hadron Collider), le « grand collisionneur de hadrons » situé au CERN à Genève; cf. e.g. : <https://home.cern/fr/science/accelerators/large-hadron-collider>.

14. Γ est la notation traditionnellement utilisée en physique des particules pour représenter la largeur ΔE de la résonance. Les données expérimentales de la résonance sont ajustées par une courbe continue, dite *courbe de Breit-Wigner*. On rappelle que : $1 \text{ eV} \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

2.3.2 L'inégalité temps-énergie de Mandelshtam et Tamm (1945)

Le théorème de Heisenberg

Soit \hat{A} un opérateur hermitien, et un état quantique $\psi(x, t)$. Le théorème de Heisenberg décrit l'évolution temporelle de la valeur moyenne $\langle \hat{A} \rangle$ de cet opérateur dans l'état quantique $\psi(x, t)$:

$$\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle \quad (2.48)$$

\hat{H} est l'opérateur hamiltonien du système physique. Lorsque l'opérateur \hat{A} ne dépend pas explicitement du temps, la dernière dérivée partielle est nulle, et le théorème de Heisenberg se réduit à :

$$\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle \quad (2.49)$$

de telle sorte que la valeur moyenne du commutateur peut s'écrire :

$$\langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle = i\hbar \frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} \quad (2.50)$$

Inégalité temps-énergie via Robertson

Soit Δa la dispersion statistique de l'opérateur \hat{A} dans l'état quantique $\psi(x, t)$. Appliquons l'inégalité de Robertson (2.11) aux deux opérateurs \hat{A} et \hat{H} , dont la dispersion statistique est ΔE :

$$\Delta a \times \Delta E \geq \frac{1}{2} | \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle | \quad (2.51)$$

D'après le théorème de Heisenberg (2.50), on peut écrire lorsque l'opérateur \hat{A} est supposé indépendant du temps :

$$\Delta a \times \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} \right| \quad (2.52)$$

Définissons alors la durée caractéristique Δt_A d'évolution de la valeur moyenne $\langle \hat{A} \rangle$ par :

$$\Delta t_A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta a}{\left| \frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} \right|} \quad (2.53)$$

L'inégalité de Robertson se réécrit sous la forme de Mandelshtam¹⁵ et Tamm¹⁶ [14, 15] :

$$\boxed{\Delta t_A \times \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}} \quad (2.54)$$

Démonstration du théorème de Heisenberg

On écrit :

$$\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \hat{A}(t) | \psi(t) \rangle = \left(\frac{d\langle \psi(t) |}{dt} \right) \hat{A}(t) | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t} | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \hat{A}(t) \left(\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} \right) \quad (2.55)$$

Pour le dernier terme, on utilise l'équation de Schrödinger :

$$\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (2.56)$$

Pour le premier terme, on utilise le conjugué hermitique de (2.56) et le caractère hermitien du hamiltonien ($\hat{H}^\dagger = \hat{H}$) :

$$\frac{d\langle \psi(t) |}{dt} = -\frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | \hat{H}^\dagger = -\frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | \hat{H} \quad (2.57)$$

15. Leonid I. Mandelshtam (1879-1944), physicien soviétique.

16. Igor Y. Tamm (1895-1971), physicien soviétique, colauréat (avec Ilia Frank et Pavel Tcherenkov) du prix Nobel de physique de 1958 « pour la découverte et l'interprétation de l'effet Cherenkov ».

Références

- [1] Werner Heisenberg, *Physique et Philosophie – La science moderne en révolution*, Albin Michel (1961), réédition (2022), ISBN 978-2-226-47332-5. (p. 37)
- [2] Jean-Marc Lévy-Leblond, *Les inégalités de Heisenberg*, Bulletin de l'Union des Physiciens **558** (1973), 1-20, [bupdoc.udpcc.asso.fr/consultation/une_fiche.php?ID_fiche=14043](http://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/une_fiche.php?ID_fiche=14043).
- [3] Howard P. Robertson, *The Uncertainty Principle*, Physical Review **34** (1929), 163-164, doi:10.1103/PhysRev.34.163
- [4] Edward Condon, *Remarks on Uncertainty Principles*, Science **LXIX (1796)** (1929), 573-574, doi:10.1126/science.69.1796.573
- [5] Erwin Schrödinger, *Zum Heisenbergschen unschärfepnzprinzip*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (Math. Phys.) **19** (1930), 296-303.
Traduction anglaise : doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/9903100
- [6] Gustavo Rigolin, *A simple derivation of the Schrödinger uncertainty relation*, European Journal of Physics **36 (6)** (2015), 065007, doi.org/10.1088/0143-0807/36/6/065007
- [7] Wolfgang Pauli, *General Principles of Quantum Mechanics*, Springer (1980), ISBN 978-3-540-09842-3.
- [8] Eric A. Galapon, *Pauli's theorem and quantum canonical pairs : the consistency of a bounded, self-adjoint time operator canonically conjugate to a Hamiltonian with non-empty point spectrum*, Proceedings of the Royal Society of London **A 458 (2018)** (2001), 451-472, doi.org/10.1098/rspa.2001.0874.
Version corrigée : /doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/9908033
- [9] Eric A. Galapon, *Post Pauli's Theorem Emerging Perspective on Time in Quantum Mechanics*, dans : Gonzalo Muga, Andreas Ruschhaupt et Adolfo Campo (éditeurs), *Time in Quantum Mechanics – Vol. 2*, Springer (2009), ISBN 978-3-642-03173-1, pp. 25-63.
- [10] Rudolf Peierls, *Surprises in theoretical physics*, Princeton University Press (1979), ISBN 0-691-08242-1, cité p. 37.
- [11] Eugene P. Wigner, *On the time-energy uncertainty relation*, dans : Abdus Salam et Eugene P. Wigner (éditeurs), *Aspects of Quantum Theory – Dedicated to Dirac's 70th Birthday*, Cambridge University Press (1972), ISBN 0-521-08600-0, pp. 237-247.
- [12] Mariam D'Ciofalo Khodaverdian, *Accuracy and Precision of the Z Boson Mass Measurement with the ATLAS Detector*, Stockholm Kungsholmen's Gymnasium (2019).
- [13] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group), *Review of Particle Physics – Z Mass*, Physical Review **D 98** (2018), 030001, /doi.org/10.1103/PhysRevD.98.030001
- [14] Leonid I. Mandelshtam et Igor Y. Tamm, *The uncertainty relation between energy and time in nonrelativistic quantum mechanics*, Izv. Akad. Nauk SSSR (ser. Fiz.) **9** (1945) 122-128. Traduction anglaise : J. Phys. (USSR) **9** (1945), 249-254.
- [15] Albert Messiah, *Mécanique quantique*, Dunod (1959).
- [16] Asher Peres, *Quantum Theory : Concepts and Methods*, Kluwer Academic Publishers (2002), ISBN 978-0-792-33632-1.
- [17] Philip M. Morse et Herman Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill (1953).
- [18] Yakir Aharonov et David Bohm, *Time in the Quantum Theory and the Uncertainty Relation for Time and Energy*, Physical Review **122** (1961), 1649-1658, doi.org/10.1103/PhysRev.122.1649
- [19] Vladimir A Fock, *More about the energy-time uncertainty relation (reply to Aharonov and Bohm)*, Soviet Physics Uspekhi **8 (4)** (1966), 628, doi:10.1070/PU1966v008n04ABEH002997
- [20] Mariano E. Bauer et Pier A. Mello, *The time-energy uncertainty relation*, Annals of Physics **111 (1)** (1978), 38-60, doi.org/10.1016/0003-4916(78)90223-3
- [21] Paul Busch, *On the energy-time uncertainty relation (Parts I and II)*, Foundations of Physics **20** (1990), 1-32 et 33-43.
- [22] Paul Busch, Teiko Heinonen et Pekka Lahti, *Heisenberg's uncertainty principle*, Physics Reports **452 (6)** (2007), 155-176, doi.org/10.1016/j.physrep.2007.05.006
- [23] Paul Busch, *The time-energy uncertainty relation*, chapitre 3 de : G. Muga et al. (éditeurs), *Time in Quantum Mechanics*, Springer Verlag (2e edition - 2007), quant-ph/0105049.
- [24] Jan Hilgevoord, *The uncertainty principle for energy and time*, American Journal of Physics **64** (1996), 1451-1456.
- [25] Jan Hilgevoord, *The uncertainty principle for energy and time (II)*, American Journal of Physics **66** (1998), 396-402.
- [26] Jan Hilgevoord, *Time in quantum mechanics*, American Journal of Physics **70** (2002), 301-306.
- [27] Jan Hilgevoord, *Time in Quantum Mechanics : A Story of Confusion*, Studies in History and Philosophy of Science Part B : Studies in History and Philosophy of Modern Physics **36 (1)** (2005), 29-60.
Erratum : Studies in History and Philosophy of Science Part B : Studies in History and Philosophy of Modern Physics **36 (2)** (2005), 413.
- [28] Jan Hilgevoord et David Atkinson, *Time in Quantum Mechanics*, dans : Craig Callender (éditeur), *The Oxford Handbook of Philosophy of Time*, Oxford University Press (2011), ISBN 978-0-19-929820-4.
- [29] Viktor V. Dodonov et Alexander V. Dodonov, *Energy-time and frequency-time uncertainty relations : Exact inequalities*, Physica Scripta **90 (7)** (2015), 074049, doi:10.1088/0031-8949/90/7/074049