

Développements limités

Formule de Taylor-Young

Soit une fonction $f(x)$ supposée suffisamment régulière au voisinage d'un point x_0 . Pour x voisin de x_0 , on peut alors écrire :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 f''(x_0) + \dots + \frac{1}{n!} (x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) + o((x - x_0)^n)$$

où $n!$ est la factorielle de l'entier n , qui vaut : $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$, et $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de la fonction f .

En posant $x = x_0 + h$, on obtient la formule équivalente au voisinage de $h = 0$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(h^n)$$

Développement en série entière

Pour certaines fonctions $f(x)$ suffisamment régulières, on peut parfois écrire un développement en série entière :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (x - x_0)^n f^{(n)}(x_0)$$

où la série converge dans un voisinage du point x_0 , caractérisé par un « rayon de convergence » R .

Fonctions usuelles

Développements limités des fonctions usuelles au voisinage de $x_0 = 0$:

Fonction	Développements limités	R
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$	$+\infty$
$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + O(x^9)$	$+\infty$
$\arcsin x$	$x + \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} + \left[\frac{1 \times 3}{2 \times 4} \right] \times \frac{x^5}{5} + \dots + \left[\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} \right] \times \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)}$	1
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + O(x^9)$	1
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)}$	1
$\exp x$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$
$\operatorname{ch} x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$
$\operatorname{sh} x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$	$+\infty$
$\operatorname{th} x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + O(x^9)$	$+\infty$
$\operatorname{argsh} x$	$x - \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} + \left[\frac{1 \times 3}{2 \times 4} \right] \times \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \left[\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} \right] \times \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)}$	1
$\operatorname{argch} x$	Pas de DL en $x_0 = 0$, car fonction définie sur $[1, +\infty[$	$\emptyset$
$\operatorname{argth} x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)}$	1
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha \times (\alpha-1)}{2!} \times x^2 + \dots + \frac{\alpha \times (\alpha-1) \times \dots \times [\alpha - (n-1)]}{n!} \times x^n$	1
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n$	1
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \dots + x^n$	1
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{(n-1)} \frac{x^n}{n}$	1