Michel **Antoine**, *Ph.D.*
Physique Théorique

Caen
Normandie

Analyse Dimensionnelle

1 Dimensions

Ce paragraphe est constitué principalement d'extraits du texte officiel du Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) de Paris [1].

1.1 Grandeurs et unités

La valeur d'une grandeur est généralement exprimée sous la forme du produit d'un nombre par une unité. L'unité n'est qu'un exemple particulier de la grandeur concernée, utilisé comme référence. Le nombre est le rapport entre la valeur de la grandeur en question et l'unité.

Pour une grandeur particulière, on peut utiliser de nombreuses unités différentes. Par exemple, la vitesse v d'une particule peut être exprimée sous la forme $v = 25$ m/s = 90 km/h, les unités « mètre par seconde » et « kilomètre par heure » étant des unités alternatives pour exprimer la même valeur de la grandeur « vitesse ».

Il est commode de choisir les définitions d'un nombre restreint d'unités appelées *unités de base*, et de définir ensuite les unités des autres grandeurs comme produits de puissances des unités de base, appelées *unités dérivées*. De manière similaire, les grandeurs correspondantes sont décrites comme *grandeurs de base* et *grandeurs dérivées* [1].

Les grandeurs de base utilisées dans le SI sont la longueur, la masse, le temps, le courant électrique, la température thermodynamique, la quantité de matière et l'intensité lumineuse. Les grandeurs de base sont, par convention, considérées comme indépendantes. Les unités de base correspondantes du SI sont le mètre, le kilogramme, la seconde, l'ampère, le kelvin, la mole et la candela.

1.2 Dimensions de base SI

Par convention, les grandeurs physiques sont organisées selon un système de dimensions. Chacune des sept grandeurs de base du SI est supposée avoir sa propre dimension, représentée symboliquement par une seule lettre majuscule [2] :

Dimension	Symbole
Longueur	L
Temps	T
Masse	M
Courant électrique	I
Température	Θ
Quantité de matière	N
Intensité lumineuse	J

Toutes les autres grandeurs sont des grandeurs dérivées, qui peuvent être exprimées en fonction des grandeurs de base à l'aide des équations de la physique. Les dimensions des grandeurs dérivées sont écrites sous la forme de *produits de puissances des dimensions des grandeurs de base* au moyen des équations qui relient les grandeurs dérivées aux grandeurs de base. En général la dimension d'une grandeur Q s'écrit sous la forme d'un produit dimensionnel [3] :

$$\dim Q \;=\; L^{\alpha}\, M^{\beta}\, T^{\gamma}\, I^{\delta}\, \Theta^{\epsilon}\, N^{\zeta}\, J^{\eta} \tag{1.1}$$

où les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$ et η, qui sont en général de petits nombres entiers, positifs, négatifs ou nuls, sont appelés « exposants dimensionnels ».

NB Les dimensions d'une grandeur sont souvent notées avec des crochets (notation introduite par Maxwell) :

$$[\,Q\,] = \dim Q \tag{1.2}$$

1. Du point de vue scientifique, la division des grandeurs en grandeurs de base et grandeurs dérivées est affaire de convention ; ce n'est pas fondamental pour la compréhension de la physique sous-jacente.
2. Officiellement, cette lettre majuscule devrait être « sans empattement en romain », ce que le traitement de texte utilisé ne permet pas toujours.
3. Pour une définition plus précise du concept de dimension, permettant notamment de justifier le fait que l'on a toujours des *monômes*, voir e.g. le cours de Stéphane Fauve [2].

Par exemple, si v est une vitesse, on écrit son équation aux dimensions :

$$[\ v\ ] \ = \ L\,T^{-1} \tag{1.3}$$

Certaines grandeurs dérivées Q sont définies par une équation aux grandeurs telle que tous les exposants dimensionnels entrant dans l'expression de la dimension de Q sont égaux à zéro. C'est vrai, en particulier, pour une grandeur définie comme le rapport entre deux grandeurs de même nature. Ces grandeurs sont décrites comme étant sans dimension, ou de dimension un [4].

Il existe également des grandeurs qui ne peuvent pas être décrites au moyen des sept grandeurs de base du SI, mais dont la valeur est déterminée par comptage (par exemple le nombre de molécules). Ces grandeurs sont aussi habituellement considérées comme sans dimension, ou de dimension un.

1.3 Application

Les équations aux dimensions sont utiles pour vérifier l'*homogénéité* des formules : si par exemple on trouve une équation aux dimensions MLT^{-1} alors qu'on calcule une vitesse, c'est qu'il y a une erreur quelque part !

Déterminer les équations aux dimensions pour les grandeurs suivantes :

1. Accélération a
2. Force F
3. Energie E
4. Puissance P
5. Action, par exemple : moment cinétique $L = m\,r\,v$ d'une particule de masse m

---

2 Analyse dimensionnelle

2.1 Principe zéro de la Physique Théorique

L'analyse dimensionnelle permet souvent de prévoir a priori la forme analytique d'une grandeur physique. Wheeler [5] formule ainsi le « principe zéro de la Physique Théorique » ([3] p 81 [6]) :

Ne jamais faire de calculs avant d'en connaitre le résultat.

Le « théorème pi » (cf. infra) peut être vu comme une traduction quantitative du principe de Wheeler. Quelques références générales sur l'analyse dimensionnelle sont [4, 5, 6].

2.2 Théorème π

Le « théorème π » est attribué à Vashy [7] et Buckingham [8].

2.2.1 Énoncé du théorème π

Supposons que l'on ait fait le choix d'un système d'unités [7].

Considérons un ensemble de $(n+1)$ grandeurs physiques $\{A_i\}$, $(i = 0,1,\ldots,n)$. Pour chaque grandeur, on peut écrire formellement :

$$A_i \ = \ a_i\ U_{A_i} \tag{2.1}$$

4. L'unité cohérente dérivée de telles grandeurs est toujours le nombre un (1), puisque c'est le rapport entre les unités de deux grandeurs de même nature, donc identiques.
5. John Archibald Wheeler (1911-2008), physicien théoricien américain. On peut lire son autobiographie : John A Wheeler (avec Kenneth Ford) ; *Geons, blacks holes & quantum foams - A life in physics*, WW Norton & Company, Inc. (New York-1998).
6. Dans cet ouvrage, ce principe est baptisé « principe moral de Wheeler ».
7. Ce système d'unité peut être le SI, mais il est parfois commode de choisir un autre système ; voir e.g. le cours de Stéphane Fauve [2].

où a_i est la valeur numérique de la grandeur physique A_i dans l'unité U_{A_i} ; on supposera qu'aucun a_i n'est nul, ni infini.

Supposons de plus qu'il existe une loi physique qui relie les $(n+1)$ grandeurs physiques $\{A_i\}$. Cette loi physique prend la forme d'une relation entre les valeurs numériques, qu'on peut toujours écrire sous la forme :

$$a_0 = f(a_1, \ldots, a_n) \tag{2.2}$$

Supposons enfin que l'on ait fait le choix de k dimensions indépendantes (ce choix est arbitraire) ; en général, on a : $k < n$.

Théorème. *La loi physique* (2.2) *peut se mettre sous la forme d'une relation entre* $(n+1-k)$ *groupements* π_j *sans dimensions :*

$$\pi_0 = g(\pi_1, \ldots, \pi_{n-k}) \tag{2.3}$$

La loi physique est ainsi passée d'une relation entre $(n+1)$ variables à une relation entre $(n+1-k)$ variables indépendantes.

2.2.2 Justification du théorème π

Supposons que les k dimensions indépendantes soient associées aux k premières grandeurs $A_1, \ldots, A_k$. Alors, les $(n+1-k)$ grandeurs restantes $A_0, A_{k+1}, \ldots, A_n$ ne sont pas indépendantes, et on peut écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
[\,A_0\,] &= [\,A_1\,]^{l_1}\,[\,A_2\,]^{l_2}\,\ldots\,[\,A_k\,]^{l_k} \\
[\,A_{k+1}\,] &= [\,A_1\,]^{n_1}\,[\,A_2\,]^{n_2}\,\ldots\,[\,A_k\,]^{n_k} \\
&\vdots \\
[\,A_n\,] &= [\,A_1\,]^{s_1}\,[\,A_2\,]^{s_2}\,\ldots\,[\,A_k\,]^{s_k}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

pour certains exposants dimensionnels $l_1, \ldots, l_k, n_1, \ldots, n_k, \ldots, s_1, \ldots, s_k,$.

Effectuons maintenant un changement d'échelle des k unités indépendantes, tel que : $U_{A_i} \mapsto U'_{A_i} = U_{A_i}/\lambda_i$ pour k paramètres d'échelle λ_i quelconques (où : $i = 1, \ldots, k$). À ce changement d'échelle des k unités indépendantes est associé un changements d'échelle des k valeurs numériques liées :

$$a_i \mapsto a'_i = \lambda_i\, a_i \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{2.5}$$

Sous ces transformations, les contraintes (2.4) imposent les changements des autres valeurs numériques :

$$\begin{aligned}
a_0 \mapsto a'_0 &= \lambda_1^{l_1}\,\lambda_2^{l_2}\,\ldots\,\lambda_k^{l_k} \times a_0 \\
a_{k+1} \mapsto a'_{k+1} &= \lambda_1^{n_1}\,\lambda_2^{n_2}\,\ldots\,\lambda_k^{n_k} \times a_{k+1} \\
&\vdots \\
a_n \mapsto a'_n &= \lambda_1^{s_1}\,\lambda_2^{s_2}\,\ldots\,\lambda_k^{s_k} \times a_n
\end{aligned} \tag{2.6}$$

On suppose enfin que la loi physique est *indépendante* de cette transformation d'échelle, i.e. qu'on peut toujours écrire :

$$a'_0 = f(a'_1, \ldots, a'_n) \tag{2.7}$$

pour la même fonction f. On peut donc écrire :

$$a'_0 = f(\lambda_1\, a_1, \ldots, \lambda_k\, a_k, a'_{k+1}, \ldots, a'_n) \tag{2.8}$$

On considère alors le cas particulier où les k paramètres d'échelle λ_i sont tels que $\lambda_i\, a_i = 1$, soit : $\lambda_i = 1/a_i$ pour $i = 1, \ldots, k$. La relation précédente devient :

$$a'_0 = f(1, \ldots, 1, a'_{k+1}, \ldots, a'_n) \tag{2.9}$$

En utilisant les lois d'échelle (2.6), cette relation se réécrit :

$$\frac{a_0}{a_1^{l_1}\,a_2^{l_2}\,\ldots\,a_k^{l_k}} = f\left(1, \ldots, 1, \frac{a_{k+1}}{a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\ldots\,a_k^{n_k}}, \ldots, \frac{a_n}{a_1^{s_1}\,a_2^{s_2}\,\ldots\,a_k^{s_k}}\right) \overset{\text{def}}{=} g\left(\frac{a_{k+1}}{a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\ldots\,a_k^{n_k}}, \ldots, \frac{a_n}{a_1^{s_1}\,a_2^{s_2}\,\ldots\,a_k^{s_k}}\right) \tag{2.10}$$

Les $(n+1-k)$ quotients qui apparaissent dans cette formule sont tous *sans dimensions*, d'après (2.4). Il n'y a plus qu'à les renommer π_j, en les numérotant de façon adaptée.

2.3 Exercice 1 : période du pendule simple

Un pendule simple est constitué par une masse ponctuelle m attachée à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur l et de masse m_{fil} négligeable devant m ($m_{\text{fil}} \ll m$). Le dispositif est placé dans le champ de pesanteur terrestre uniforme $\vec{g}$. Lorsque le pendule est écarté de sa position d'équilibre stable verticale d'un angle θ_0, et lâché sans vitesse initiale, il décrit des oscillations de période T dans un plan vertical. On constate expérimentalement que cette période T est *indépendante* de la masse m, et ne dépend que des paramètres suivants :

— la longueur l du fil
— l'intensité g du champ de pesanteur
— l'amplitude θ_0

Comment s'exprime la période T en fonction des paramètres ci-dessus ?

2.4 Exercice 2 : vitesse de propagation d'un ébranlement

La vitesse v de propagation d'un mouvement vibratoire le long d'une corde tendue dépend de :

— la longueur l de la corde
— la masse m de la corde
— la tension T de la corde (la tension est homogène à une force)

Comment s'exprime la vitesse v en fonction des paramètres ci-dessus ?

2.5 Exercice 2 : les grandeurs de Planck (1900)

La théorie de la gravitation de Newton (1687) introduit la constante de gravitation universelle G. L'électromagnétisme de Maxwell-Faraday (1865) introduit la constante c, vitesse de la lumière dans le vide Enfin, la théorie quantique introduit la constante de Planck [8] h. Numériquement :

$$G = 6.67\,10^{-11}\ \text{S.I.} \tag{2.11a}$$
$$c = 3\,10^{+8}\ \text{m/s} \tag{2.11b}$$
$$h = 6.62\,10^{-34}\ \text{Js} \tag{2.11c}$$

1. Déterminer les équations aux dimensions de G, c et h.
2. A partir de G, c et h, construire une longueur l_p, un temps t_p et une masse m_p. Ces grandeurs portent le nom de grandeurs de Planck, d'après leur auteur. On vérifiera que :

$$m_p \simeq 5.5\,10^{-8}\ \text{kg} \tag{2.12a}$$
$$l_p \simeq 4\,10^{-35}\ \text{m} \tag{2.12b}$$
$$t_p \simeq 10^{-43}\ \text{s} \tag{2.12c}$$

Références

[1] BIPM, *Le Système international d'unités (SI)*, 8ème édition (2006). `http://www.bipm.org/utils/common/pdf/si_brochure_8_fr.pdf`

[2] Stéphane Fauve, *Ordres de grandeur en physique - 1. Rappels d'analyse dimensionnelle*, ENS Ulm (2010). `http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=2739#`

[3] E.F. Taylor et John A. Wheeler, *À la découverte de l'espace-temps*, Dunod (1970).

[4] Percy W. Bridgman, *Dimensional Analysis*, Yale University Press (1922). `http://archive.org/details/dimensionalanaly00bridrich`

[5] Leonid I. Sedov, *Similarity & Dimensional Methods in Mechanics*, CRC Press (10ème édition-1993), ISBN 0-8493-9308-6.

[6] Grigory I. Barenblatt, *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics*, Cambridge University Press (1996), ISBN 0-521-43522-6.

[7] A. Vaschy, *Sur les lois de similitude en physique*, Annales Télégraphiques **19** (1892), 25-28.

[8] E. Buckingham, *On physically similar systems. Illustrations of the use of dimensional equations*, Physical Review **4** (1914), 345-376.

8. On définit également le quantum d'action $\hbar = h/2\pi$. Alors, $h\nu = \hbar\omega$, où $\omega = 2\pi\nu$ est la pulsation. Les expérimentateurs, qui mesurent la fréquence ν, utilisent plutôt h. Les théoriciens, qui font beaucoup de calculs, préfèrent souvent $\hbar$ pour ne pas trainer partout des facteurs 2π. Par exemple, ils écrivent : $\cos(\omega t)$ au lieu de : $\cos(2\pi\nu t)$.