Michel **Antoine**, *Ph.D.*
PHYSIQUE THÉORIQUE

CAEN
NORMANDIE

# *Formulaire d'analyse harmonique*

## 1 Notations

On considère une fonction *réelle* $f$ du temps $t$, périodique de période $T$ :

$$\forall\ t,\ f(t+T) = f(t) \tag{1.1}$$

On introduit la pulsation $\omega$ associée à la période $T$ :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1.2}$$

Comme souvent en physique, on note $j$ le nombre complexe imaginaire pur tel que :

$$j^2 = -1 \tag{1.3}$$

---

## 2 Série de Fourier à coefficients complexes

### 2.1 Définitions

La fonction réelle $f(t)$ admet la représentation en série de Fourier suivante :

$$S_\infty(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \mathrm{e}^{+jn\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, \mathrm{e}^{+jn\omega t} \tag{2.1}$$

où les coefficients *complexes* $c_n$ valent :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, \mathrm{e}^{-jn\omega t}\, \mathrm{d}t\,, \qquad c_n \in \mathbb{C} \tag{2.2}$$

L'intégrale est indépendante de l'instant $t_0$ choisi. La réalité de la fonction $f$ sa traduit par la condition :

$$c_{-n} = \overline{c_n} \tag{2.3}$$

En particulier, le coefficient $c_0$ est réel, et représente la *valeur moyenne* de la fonction $f$ sur une période :

$$c_0 = \langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, \mathrm{d}t\,, \qquad c_0 \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

### 2.2 Propriété

**Théorème (Dirichlet).** *Si la fonction périodique $f(t)$ est continue par morceaux et dérivable par morceaux*[1], *la série de Fourier converge pour tout $t$ vers la demi-somme :*

$$S_\infty(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \tag{2.5}$$

*La convergence est* uniforme *sur tout intervalle fermé ne contenant aucun point de discontinuité de la fonction $f$.*

1. « Dérivable par morceaux » signifie que l'intervalle $[0, T]$ peut être décomposé en un nombre *fini* d'intervalles $[\alpha, \beta]$ tels que, dans chaque intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$, la fonction $f(t)$ est continue et est la primitive d'une fonction $f'(t)$ continue par morceaux dans $]\alpha, \beta[$. Pour une démonstration du théorème, le lecteur pourra consulter [1]. Si on omet l'hypothèse de dérivabilité par morceaux, les mathématiciens savent trouver des fonctions périodiques continues « pathologiques » pour lesquelles la série de Fourier diverge en certains points.

## 3 Série de Fourier à coefficients réels (I)

La fonction $f(t)$ admet la représentation en série de Fourier suivante :

$$S_\infty(t) \;=\; \langle\, f\,\rangle \;+\; \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) \;+\; b_n \sin(n\omega t) \tag{3.1}$$

où les coefficients *réels* $a_n$ et $b_n$ valent pour $n > 0$ :

$$a_n \;=\; \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad a_n \in \mathbb{R} \tag{3.2a}$$

$$b_n \;=\; \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad b_n \in \mathbb{R} \tag{3.2b}$$

Les intégrales sont indépendantes de l'instant $t_0$ choisi. Lorsque la fonction $f(t)$ est paire ou impaire, il est commode de choisir $t_0 = -T/2$. On en déduit que :

— si $f(t)$ est paire, tous les $b_n$ sont nuls ;
— si $f(t)$ est impaire, tous les $a_n$ sont nuls.

On a les relations pour $n > 0$ :

$$a_n \;=\; c_n + \overline{c_n} \;=\; c_n + c_{-n} \;=\; 2\,\Re\mathrm{e}\,[\,c_n\,] \tag{3.3a}$$

$$b_n \;=\; j\left(c_n - \overline{c_n}\right) \;=\; j\,(c_n - c_{-n}) \;=\; -2\,\Im\mathrm{m}\,[\,c_n\,] \tag{3.3b}$$

soit encore pour $n > 0$ :

$$c_n \;=\; \frac{a_n - j\,b_n}{2} \tag{3.4a}$$

$$c_{-n} \;=\; \overline{c_n} \;=\; \frac{a_n + j\,b_n}{2} \tag{3.4b}$$

En introduisant la représentation module et argument des nombres complexes $c_n$ :

$$c_n \;=\; |c_n|\,\mathrm{e}^{+j\psi_n} \tag{3.5}$$

on obtient les relations pour $n > 0$ :

$$a_n \;=\; 2\,|c_n|\cos\psi_n \tag{3.6a}$$

$$b_n \;=\; -\,2\,|c_n|\sin\psi_n \tag{3.6b}$$

soit encore pour $n > 0$ :

$$|c_n| \;=\; \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} \tag{3.7a}$$

$$\tan\psi_n \;=\; -\,\frac{b_n}{a_n} \tag{3.7b}$$

---

### 3.1 Commandes Mathematica

**FourierCoefficient** ; **FourierSeries** ; **FourierCosCoefficient** ; **FourierSinCoefficient** ; **FourierTrigSeries** ; **FourierCosSeries** ; **FourierSinSeries**.

⚠ On prendra garde à la convention utilisée par défaut par Mathematica (cf. aide). Pour changer de convention, on utilisera l'option **FourierParameters → {a, b}**

# 4 Série de Fourier à coefficients réels (II)

La fonction $f(t)$ admet la représentation en série de Fourier suivante :

$$S_\infty(t) \;=\; \langle\, f\,\rangle \;+\; \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos\big(n\omega t + \varphi_n\big) \tag{4.1}$$

Les amplitudes $C_n$ *réelles* et les phases à l'origine $\varphi_n$ *réelles* vérifient les relations pour $n > 0$ :

$$C_n \;=\; \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \;=\; 2\,|c_n| \tag{4.2a}$$

$$\tan\varphi_n \;=\; -\,\frac{b_n}{a_n} \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi_n \;=\; +\,\psi_n \tag{4.2b}$$

soit encore pour $n > 0$ :

$$c_n \;=\; |c_n|\,\mathrm{e}^{+j\psi_n} \;=\; \frac{C_n}{2}\;\mathrm{e}^{+j\varphi_n} \tag{4.3}$$

# 5 Formule de Parseval

## 5.1 Définition

La fonction $f(t)$ admettant la représentation en série de Fourier suivante :

$$S_\infty(t) \;=\; \langle\, f\,\rangle \;+\; \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos\big(n\omega t + \varphi_n\big) \tag{5.1}$$

on démontre la formule de Parseval :

$$\langle\, f^2\,\rangle \;=\; \langle\, f\,\rangle^2 \;+\; \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} C_n^2 \tag{5.2}$$

## 5.2 Ecart quadratique moyen

Dans la formule de Parseval, la somme représente le carré de l'écart quadratique moyen :

$$\Delta f^2 \overset{\text{def}}{=} \langle\, \big(\, f - \langle\, f\,\rangle\,\big)^2\,\rangle \;=\; \langle\, f^2\,\rangle \;-\; \langle\, f\,\rangle^2 \;=\; \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} C_n^2 \tag{5.3}$$

soit une fluctuation quadratique moyenne égale à :

$$\Delta f \;=\; \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} C_n^2} \tag{5.4}$$

# Références

[1] Jean Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann (2ème édition-1980), ISBN 2-7056-5907-2.

# 6 Transformée de Fourier

Pour les fonctions non-périodiques, mais intégrables[2], on introduit une généralisation de la notion de série de Fourier en remplaçant la somme discrète sur l'indice $n$ (donc sur les pulsations $\omega_n = n\omega$) par une intégrale (somme continue) sur le paramètre $\omega$. Il existe plusieurs conventions possibles, qui diffèrent l'une de l'autre par la place d'un facteur numérique $2\pi$.

## 6.1 Convention n° 1 (« symétrique »)

On pose par définition :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, \mathrm{e}^{+j\omega t}\, \frac{\mathrm{d}\omega}{\sqrt{2\pi}} \tag{6.1a}$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-j\omega t}\, \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}} \tag{6.1b}$$

La fonction continue $\hat{f}(\omega)$ (en général complexe, même si $f(t)$ est réelle) est appelée « transformée de Fourier » de la fonction $f(t)$ ; $\hat{f}(\omega)$ généralise les coefficients de Fourier $c_n$.

Avec cette convention, la formule de Plancherel-Parseval s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\, \mathrm{d}\omega \tag{6.2}$$

## 6.2 Convention n° 2 (« dissymétrique »)

On pose par définition :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, \mathrm{e}^{+j\omega t}\, \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \tag{6.3a}$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t \tag{6.3b}$$

Avec cette convention, la formule de Plancherel-Parseval s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\, \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \tag{6.4}$$

## 6.3 Commandes Mathematica

### 6.3.1 Calcul formel

**FourierTransform** ; **InverseFourierTransform** ; **FourierCosTransform** ; **InverseFourierCosTransform** ; **FourierSinTransform** ; **InverseFourierSinTransform** ; **FourierSequenceTransform** ; **InverseFourierSequenceTransform**.

⚠ On prendra garde à la convention utilisée par défaut par Mathematica (cf. aide). Pour changer de convention, on utilisera l'option **FourierParameters → {a, b}**

# 7 (HP) Analyse harmonique généralisée

En optique ondulatoire, on considère souvent une vibration lumineuse quasi-monochromatique $s(t)$ en régime stationnaire, pour laquelle l'intensité moyenne est constante. Une telle fonction n'est en général pas sommable sur $\mathbb{R}$. Il est néanmoins possible de développer une analyse fréquentielle rigoureuse de tels signaux[3]. Consulter e.g. : Max Born et Emil Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press (6$^{\text{ème}}$ édition-1997), pp. 491-499.

2. $f(t)$ est sommable si $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$. De même, $f(t)$ est de carré sommable si $\|f\|_2 = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, \mathrm{d}t \right)^{1/2} < \infty$.
3. Norbert Wiener, *Generalized Harmonic Analysis*, Acta Mathematica **55** (1930), 117-258.