Michel **Antoine**, *Ph.D.*
Physique Théorique

Caen
Normandie

Formulaire d'analyse vectorielle dans $\mathbb{R}^3$

Relations intrinsèques

1 Identités fondamentales

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}} = \vec{0}} \qquad \text{et :} \qquad \boxed{\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}} = 0} \tag{1.1}$$

$$\boxed{\Delta = \mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}} \qquad \text{et :} \qquad \boxed{\vec{\Delta} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}} \tag{1.2}$$

2 Formules diverses

$$\mathrm{div}\,(f\vec{A}) = (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f)\cdot\vec{A} + f\,\mathrm{div}\,\vec{A} \tag{2.1a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\vec{A}) = (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f)\wedge\vec{A} + f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \tag{2.1b}$$

$$\mathrm{div}\,(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} \tag{2.1c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{A}\,\mathrm{div}\,\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{A} - \vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{B} \tag{2.1d}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{A} + \vec{B}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{B} \tag{2.1e}$$

---

3 Formules intégrales

Dans ces formules, Ω_d désigne génériquement un *domaine* à d dimensions [1] inclu dans $\mathbb{R}^3$. La notation formelle $\partial\Omega_d$ désigne le *bord orienté* (ou frontière) du domaine Ω_d ; c'est un objet de dimension $d-1$. Lorsque $d=2$, les orientations obéissent à la « règle du tire-bouchon » de Maxwell. Lorsque $d=3$, la surface *fermée* $\partial\Omega_3$ est orientée vers l'extérieur.

3.1 Formule de Green-Ostrogradsky

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega_3} \vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint_{\Omega_3} \mathrm{div}\,\vec{A}(M)\,d\tau} \tag{3.2}$$

1. On se limite ici aux cas $d=2$ ou 3. La formule de Stokes qui correspondrait au cas $d=1$ est simplement le « théorème fondamental du calcul » donnant l'intégrale d'une différentielle le long d'un arc AB :

$$\int_{AB} df(M) = f(B) - f(A) \tag{3.1}$$

3.2 Formule de Stokes-Ampère

$$\boxed{\oint_{\partial\Omega_2} \overrightarrow{A}(M)\cdot\overrightarrow{dM} = \iint_{\Omega_2} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}(M)\cdot\overrightarrow{dS}} \tag{3.3}$$

3.3 Remarque : le théorème de Stokes

Le théorème de Stokes (HP) est une formule générale qui contient les différentes formules (Green-Ostrogradsky, Stokes-Ampère, théorème fondamental du calcul) comme cas particuliers [2].

3.4 Formules dérivées

3.4.1 Formule du gradient

$$\oiint_{\partial\Omega_3} f\,\overrightarrow{dS} = \iiint_{\Omega_3} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\,d\tau \tag{3.4}$$

3.4.2 Formule du rotationel

$$\oiint_{\partial\Omega_3} \overrightarrow{dS}\wedge\overrightarrow{A} = \iiint_{\Omega_3} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}\,d\tau \tag{3.5}$$

3.4.3 Formule de Stokes-Kelvin

$$\oint_{\partial\Omega_2} f\,\overrightarrow{dM} = \iint_{\Omega_2} \overrightarrow{dS}\wedge\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \tag{3.6}$$

3.4.4 Première formule de Green

$$\oiint_{\partial\Omega_3} f\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint_{\Omega_3} \left[\,f\,\Delta g + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g\,\right]d\tau \tag{3.7}$$

3.4.5 Deuxième formule de Green

$$\iiint_{\Omega_3} \left[\,f\,\Delta g - g\,\Delta f\,\right]d\tau = \oiint_{\partial\Omega_3} \left[\,f\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g - g\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\,\right]\cdot\overrightarrow{dS} \tag{3.8}$$

2. La formule de Stokes s'écrit dans le langage mathématique des *formes différentielles*. Il est possible d'en donner une présentation accessible au niveau bac+2 si l'on se restreint aux coordonnées cartésiennes ; cf. e.g. Jacques Dixmier, *Cours de mathématiques du premier cycle – 2ème année*, Gauthier-Villars (1977), ISBN 2-04-001227-3. Le théorème de Stokes s'étend à $\mathbb{R}^n$ et aux « variétés différentielles » de dimension n.

Coordonnées usuelles

4 Coordonnées cartésiennes (x, y, z)

$$\text{Opérateur nabla :} \qquad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M) = \vec{\nabla}\, f(M)} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{u}_z \tag{4.2}$$

$$\boxed{d f(M) = \vec{\nabla}\, f(M) \cdot \overrightarrow{dM}} = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz \tag{4.3}$$

$$\boxed{\text{div}\,\vec{A}(M) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(M)} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}(M) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(M)} &= \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\vec{u}_x \\ &+ \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\vec{u}_y \\ &+ \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\vec{u}_z \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \text{Laplacien scalaire :} \qquad \Delta f &= \text{div}\,\overrightarrow{\text{grad}}\; f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \nabla^2 f \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\text{Laplacien vectoriel :} \qquad \Delta \vec{A}(M) = (\Delta A_x)\,\vec{u}_x + (\Delta A_y)\,\vec{u}_y + (\Delta A_z)\,\vec{u}_z \tag{4.7}$$

où : (ΔA_i) est le *laplacien scalaire* de la composante cartésienne scalaire A_i en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta A_i = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial z^2} \tag{4.8}$$

5 Coordonnées cylindriques (r, θ, z)

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M) = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{u}_z \tag{5.1}$$

$$\text{div}\,\vec{A}(M) = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{5.2}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A}(M) = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \vec{u}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_z \tag{5.3}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{5.4}$$

$$\Delta \overrightarrow{A} = \left[(\Delta A_r) - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right] \vec{u}_r + \left[(\Delta A_\theta) - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\theta + (\Delta A_z)\,\vec{u}_z \tag{5.5}$$

6 Coordonnées sphériques (r,θ,φ)

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M) = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\vec{u}_\varphi \tag{6.1}$$

$$\text{div}\ \overrightarrow{A}(M) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta\, A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \tag{6.2}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A}(M) = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial (\sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{u}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r\,A_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\varphi \tag{6.3}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\,f)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{6.4}$$

NB Le terme radial se met également sous la forme :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\,f)}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) \tag{6.5}$$

$$\Delta \overrightarrow{A} = \left[(\Delta A_r) - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial (A_\theta\sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{u}_r + \left[(\Delta A_\theta) - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{u}_\theta + \left[(\Delta A_\varphi) - \frac{A_\varphi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{u}_\varphi \tag{6.6}$$